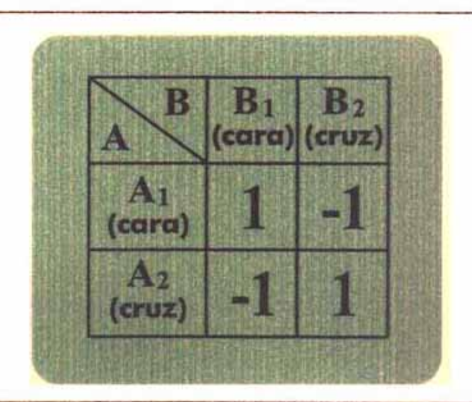
Lecciones populares de matemáticas

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE LOS JUEGOS

E. S. Véntsel



A \ B	B_1 (cara)	B_2 (cruz)
A_1 (cara)	1	-1
A_2 (cruz)	-1	1

Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
·МИР·

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Е. С. ВЕНТЦЕЛЬ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

ФИЗМАТГИЗ
МОСКВА

TRADUCIDO DEL RUSO POR BERNARDO DEL RÍO SALCEDA.
CANDIDATO A DOCTOR EN CIENCIAS TÉCNICAS

на испанском языке

IMPRESO EN LA URSS
1977

RESEÑA

En este libro en un lenguaje sencillo, se hace una exposición de los elementos de la teoría de los juegos y de ciertos procedimientos de resolución de juegos de matrices. Casi no contiene demostraciones y las tesis básicas de la teoría se ilustran con ejemplos. Para su lectura es suficiente el conocimiento de los elementos de la teoría de las probabilidades y del análisis matemático.

El objetivo del libro es la divulgación de las ideas de la teoría de los juegos, las cuales tienen amplia utilización práctica en la economía y en el arte militar.

ÍNDICE

§ 1. QUÉ ESTUDIA LA TEORÍA DE LOS JUEGOS. NOCIONES BÁSICAS

Al resolver una serie de problemas prácticos (en el terreno de la economía, del arte militar, etc.) se tienen que analizar situaciones en las cuales están representadas dos (o más) partes antagónicas que persiguen objetivos opuestos. El resultado de cada medida de una de las partes depende del tipo de acción elegido por el contrario. A estas situaciones las denominaremos "situaciones de conflicto".

Se pueden dar muchísimos ejemplos de situaciones de conflicto en diferentes campos prácticos. Cualquier situación que surja en el curso de operaciones militares pertenece a las situaciones de conflicto: cada una de las partes contrincantes toma todas las medidas que tiene a su alcance para impedir que el contrario logre el éxito. Situaciones de conflicto son también aquellas que se crean al escoger los sistemas de armamento, los métodos de su empleo y, en general, al planificar las operaciones militares: cada una de estas decisiones debe tomarse calculando la acción del contrincante menos ventajosa para nosotros. En la economía suele haber una serie de situaciones (sorbe todo, al existir la libre competencia) que pertenecen a las llamadas de conflicto; en éstas el papel de las partes antagónicas lo desempeñan las firmas comerciales, las empresas industriales, etc.

La necesidad de analizar semejantes situaciones hizo que surgiera un aparato matemático especial. La teoría de los juegos, en esencia, no es otra cosa más que la teoría matemática de las situaciones de conflicto. El objetivo de la teoría consiste en la elaboración de recomendaciones sobre la forma razonable de las acciones de cada uno de los contrincantes en el curso de una situación de conflicto.

Cada situación de conflicto tomada directamente de la práctica es muy compleja y su análisis se dificulta por haber muchísimos factores secundarios. Para hacer posible un análisis matemático de la situación es necesario prescindir de estos factores y construir un modelo simplificado y formalizado de la situación. A este modelo lo denominaremos "juego".

El juego se diferencia de una situación real de conflicto en que se realiza a base de *reglas* completamente determinadas. Desde hace mucho tiempo la humanidad emplea tales modelos formalizados de situaciones de conflicto denominados *juegos*, en el sentido estricto de la palabra. Pueden servir de ejemplo el ajedrez, las damas, los juegos de cartas, etc. Todos estos juegos tienen un carácter de emulación que transcurre de acuerdo con reglas conocidas y termina con la "victoria" (ganancia) de un jugador u otro.

Tales juegos, formalmente reglamentados y organizados de manera artificial, constituyen el material más adecuado para la ilustración y la asimilación de las nociones fundamentales de la teoría de los juegos. La terminología tomada de la práctica de dichos juegos se emplea también en el análisis de otras situaciones de conflicto: a los que participan en ellas se les llama condicionalmente "jugadores" y al resultado del encuentro, "ganancia" de una de las partes.

En el juego pueden chocar los intereses de dos o más contrincantes; en el primer caso el juego se llama "de dos personas"; en el segundo, "de varias personas". Los participantes de un juego de varias personas pueden formar coaliciones constantes o temporales. Cuando hay dos coaliciones constantes un juego de muchos se convierte en uno de dos. La mayor importancia práctica la tienen los juegos de dos personas, aquí nos limitaremos sólo al estudio de éstos.

Comencemos la exposición de la teoría elemental de los juegos formulando ciertas nociones básicas. Veamos un juego de dos personas en el que participan los jugadores A y B que tienen intereses antagónicos. Por "juego" comprenderemos un acto compuesto de una serie de acciones de los participantes A y B. Para que el juego pueda ser sometido a un análisis matemático, sus *reglas* deben de estar exactamente definidas.

Se entiende por "reglas del juego" el sistema de condiciones que determina las posibles variantes de acción de las dos partes, la cantidad de información de cada parte sobre la conducta de la otra, la sucesión de las alternaciones de las "jugadas" (soluciones aisladas que se toman en el curso del juego) y también el *resultado* o el *fin* del juego al que conduce un determinado conjunto de jugadas. Este resultado (ganancia o pérdida) no siempre tiene una expresión cuantitativa pero, generalmente, estableciendo cierta escala de medidas, se puede expresar con un número definido. Por ejemplo, en el ajedrez puede atribuirse

convencionalmente a la ganancia el valor de $+1$, a la pérdida -1, al empate 0.

Un juego se llama *de suma cero* si uno de los jugadores gana lo que pierde el otro, o sea la suma de las ganancias es igual a cero. En un juego de suma cero los intereses de los jugadores son completamente opuestos. Aquí vamos a estudiar solamente tales juegos.

En un juego de suma cero la ganancia de uno de los jugadores es igual a la ganancia del otro con signo contrario, es por eso evidente que al analizar tal juego puede examinarse la ganancia de sólo uno de los jugadores. Supongamos que éste sea, por ejemplo, el jugador A. Para mayor comodidad a continuación denominaremos condicionalmente "nosotros" a la parte A y "el adversario", a la parte B.

La parte A ("nosotros") la consideraremos siempre "la que gana" y la parte B ("el adversario"), "la que pierde". Esta condición formal, evidentemente, no significa que al primer jugador se le dé alguna preferencia real; fácilmente se ve que todo quede invertido al cambiar el signo de la ganancia por el contrario.

Vamos a imaginar que el desarrollo del juego en el tiempo se compone de una serie de etapas o "jugadas" sucesivas. En la teoria de los juegos se denomina *jugada* a la elección de una de las variantes previstas dentro de las reglas del juego. Las jugadas pueden ser *personales* o *de azar*.

Se denomina *jugada personal* a la elección consciente por uno de los jugadores en la situación creada de una de las posibles jugadas y a su realización.

Cualquiera de las jugadas en el ajedrez es un ejemplo de jugada personal. Al hacer la jugada siguiente el jugador elige conscientemente una de las variantes posibles de acuerdo a la disposición dada de las figuras en el tablero.

El conjunto de todas las posibles variantes en cada jugada personal está determinado por las reglas del juego y depende de la totalidad de jugadas anteriores de las dos partes.

Se denomina *jugada de azar* a la elección que se realiza dentro de una serie de posibilidades no por la decisión del jugador, sino por algún mecanismo de elección casual (el lanzamiento de una moneda, los dados, la acción de barajar y repartir las cartas, etc.). Por ejemplo la entrega de la primera carta a uno de los jugadores en el préférence, es una jugada de azar con 32 variantes de iguales posibilidades.

Para que el juego esté matemáticamente definido, sus reglas deberán indicar para cada jugada de azar la *distribución de las probabilidades* de las posibles salidas.

Hay juegos que pueden componerse sólo de jugadas de azar (los llamados juegos de puro azar) o sólo de jugadas personales (ajedrez, damas). La mayoría de juegos de cartas pertenece a los juegos de tipo mixto, que contienen jugadas personales y de azar.

Los juegos no sólo se clasifican por el carácter de las jugadas (personales, de azar), sino también por el carácter y por la cantidad de información que es accesible a cada jugador sobre las acciones del otro. Una clase particular de juegos la componen los llamados "juegos con información perfecta". Se denomina *juego con información perfecta* a aquel en el que cada jugador al hacer cada jugada personal conoce el resultado de todas las jugadas anteriores, tanto las personales como las de azar. Ejemplos de juegos con información perfecta son el ajedrez, las damas, también el conocido juego de "tres en raya", etc.

La mayoría de los juegos que tienen importancia práctica no pertenecen a la clase de juegos con información perfecta puesto que la incertidumbre sobre las acciones del contrario es generalmente un elemento substancial en las situaciones de conflicto.

Una de las concepciones básicas en la teoría de los juegos es la noción de "estrategia".

Llámese *estrategia* del jugador al conjunto de reglas que determinan de una manera única la elección en cada jugada personal del jugador dado en dependencia de la situación que se haya creado en el proceso del juego.

La noción de estrategia debe explicarse con más detalle.

Por lo general el jugador escoge la solución (la elección) en cada jugada personal durante la marcha del mismo juego en dependencia de la situación concreta creada. No obstante, teóricamente las cosas no cambian si nos imaginamos que el jugador toma todas estas soluciones *de antemano*. Para eso el jugador debe establecer anticipadamente una enumeración de todas las posibles situaciones que pueden aparecer en el curso del juego y prever su solución para cada una de ellas. En principio (si no en la práctica) esto es posible para cualquier juego. Si se acepta un

sistema tal de soluciones esto querrá decir que el jugador ha elegido una *estrategia* determinada.

El jugador que ha elegido la estrategia puede ahora no participar personalmente en el juego y reemplazar su participación con una lista de reglas que aplicará en su lugar alguna persona desinteresada (el árbitro). La estrategia puede ser también introducida en una máquina autómata en forma de un programa determinado. En la actualidad es precisamente así como juegan al ajedrez las máquinas computadoras electrónicas.

Para que tenga sentido la concepción de "estrategia" es necesario que en el juego haya jugadas personales. En los juegos que están compuestos sólo de jugadas de azar no existen estrategias.

En dependencia del número de posibles estrategias los juegos se dividen en "finitos" e "infinitos".

Llámese *finito* al juego en el que cada jugador sólo puede tener un número finito de estrategias.

A un juego finito en el que el jugador A puede tener m estrategias y el jugador B, n estrategias se le llama juego de $m \times n$.

Veamos un juego de $m \times n$ de dos jugadores A y B ("nosotros" y el "adversario").

Designaremos nuestras estrategias por $A_1, A_2, ..., A_m$ y las estrategias del adversario por $B_1, B_2, ..., B_n$.

Si el juego se compone sólo de jugadas personales, la elección de la estrategia A_i, B_j determina de una sola manera el término del juego, nuestra victoria. Lo designaremos a_{ij}.

Si el juego contiene jugadas de azar, además de las personales, entonces la ganancia que producen las dos estrategias A_i, B_j es una magnitud aleatoria que depende de los términos de todas las jugadas de azar. En este caso el valor natural de la ganancia esperada es su *valor medio* (la esperanza matemática). Emplearemos el mismo signo a_{ij} para la ganancia misma (en los juegos sin jugadas de azar) y para su valor medio (en los juegos con jugadas de azar).

Supongamos que conocemos el valor a_{ij} de la ganancia (o de la ganancia media) en cada par de estrategias. Se pueden expresar los valores a_{ij} en forma de una tabla (matriz) en la que las líneas corresponden a nuestras estrategias (A_i) y las columnas, a las estrategias del adversario (B_j). Esta tabla se denomina *matriz de pago* o simplemente *matriz del juego*.

La matriz del juego de $m \times n$ tiene la forma siguiente:

A \ B	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	...	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Designaremos abreviadamente esta matriz del juego por $\|a_{ij}\|$.

Veamos algunos ejemplos elementales de juegos.

Ejemplo 1. Dos jugadores, A y B, sin mirarse el uno al otro colocan en la mesa una moneda cada uno en posición de cara arriba o de cruz arriba, según su propio parecer. Si eligieron la misma posición (los dos pusieron cara o los dos cruz) entonces el jugador A se queda con las dos monedas, en caso contrario el jugador B se queda con ellas. Se debe analizar el juego y componer su matriz.

Resolución. El juego consta sólo de dos jugadas: la nuestra y la del adversario. Las dos son personales. Este juego no pertenece a los juegos con información perfecta puesto que en el momento en el cual se hace la jugada el jugador no sabe lo que ha hecho el otro.

Como cada jugador tiene sólo una jugada personal, su estrategia es la elección en esta única jugada personal.

Nosotros tenemos dos estrategias:

A_1 que es elegir la cara y A_2, elegir la cruz. El adversario tiene también las mismas dos estrategias: B_1 (cara), B_2 (cruz). Así que éste es un juego de 2×2. Consideraremos que la ganancia de una moneda se expresa con $+1$. La matriz del juego se representa aquí.

A \ B	B_1 (cara)	B_2 (cruz)
A_1 (cara)	1	−1
A_2 (cruz)	−1	1

En el ejemplo de este juego, a pesar de ser tan elemental, es posible aclarar ciertas ideas esenciales de la teoría de los juegos.

Comencemos suponiendo que este juego se hace una sola vez. Entonces es evidente que no tiene sentido hablar de tales o cuales "estrategias" de unos jugadores más razonables que otros. Cada jugador puede elegir cualquier solución con el mismo motivo. Sin embargo, al continuar el juego la cosa cambia.

Realmente, supongamos que nosotros (el jugador A) elegimos cierta estrategia (digamos la A_1) y nos atenemos a ella. Entonces ya por los resultados de las primeras jugadas el adversario adivinará nuestra estrategia y responderá de la manera menos ventajosa para nosotros o sea escogiendo la cruz. Estará claro que sería para nosotros desfavorable emplear siempre una misma estrategia; para no quedar con pérdidas tenemos que elegir unas veces cara y otras cruz. No obstante, si vamos a alternar la cara y la cruz con alguna sucesión determinada (por ejemplo una jugada sí y otra no) el adversario también puede observarlo y responder a esta estrategia de la peor manera para nosotros. Evidentemente, el procedimiento de más seguridad que garantiza que el adversario no conozca nuestra estrategia es una organización de la elección en cada jugada en la que nosotros mismos no conozcamos de antemano la solución (eso se puede asegurar, por ejemplo, lanzando una moneda al aire). Así, con razonamientos intuitivos llegamos a una de las nociones esenciales de la teoría de los juegos, a la noción de la "estrategia mixta", o sea aquella en la que las estrategias "puras" (en nuestro caso A_1 y A_2) se alternen aleatoriamente con determinadas frecuencias. En el ejemplo dado, partiendo del razonamiento de la simetría, está claro anticipadamente que las estrategias A_1 y A_2 deben alternar con igual frecuencia; en juegos más complicados la resolución puede estar lejos de ser trivial.

Ejemplo 2. Cada uno de los jugadores A y B simultánea e independientemente apunta uno de los tres números: 1, 2 ó 3.

Si la suma de los números escritos es par B le paga a A en rublos esta suma y viceversa, si es impar, o sea, A le paga la suma a B. Se requiere analizar el juego y formar su matriz.

Resolución. El juego se compone de dos jugadas; las dos son personales. Nosotros (A) tenemos tres estrategias: A_1, apuntar el 1; A_2, apuntar el 2; A_3, apuntar el 3. El adversario (B) tiene las mismas tres estrategias. Se trata entonces de un juego de 3×3 que tiene la matriz que aparece aquí.

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	−3	4
A_2	−3	4	−5
A_3	4	−5	6

Evidentemente, como en el caso anterior, a cualquier estrategia elegida por nosotros el adversario puede contestar de la manera que peor nos afecte. En efecto, si elegimos, por ejemplo, la estrategia A_1 el adversario siempre responderá a ella con la estrategia B_2, a la estrategia A_2 con la estrategia B_3, a la estrategia A_3 con la estrategia B_2. De esta manera cualquier elección de una estrategia determinada inevitablemente nos llevará a la pérdida.*

La resolución de este juego (o sea el conjunto de estrategias más ventajosas para los dos jugadores) se dará en el § 5.

Ejemplo 3. Se encuentran a nuestra disposición tres clases de armamentos: A_1, A_2, A_3; el enemigo cuenta con tres clases de aviones B_1, B_2, B_3. Nuestro objetivo consiste en hacer blanco en el avión; el del enemigo, en mantenerlo a salvo. Si se emplea el armamento A_1 se hará blanco en los aviones de las clases B_1, B_2, B_3 con las respectivas probabilidades 0,9; 0,4 y 0,2; con el armamento A_2, las probabilidades serán 0,3; 0,6 y 0,8; con el armamento A_3, serán 0,5, 0,7 y 0,2. Se requiere definir la situación en los términos de la teoría de los juegos.

Resolución. La situación puede examinarse como un juego de 3×3 con dos jugadas personales y una de azar. Nuestra jugada personal es la elección de la clase de armamento; la jugada personal del enemigo es la elección del avión que participará en el combate. La jugada de azar es el empleo del armamento; esta jugada puede acabar derribando o no el avión. Nuestra ganancia será igual a la unidad si el avión ha sido derribado y será igual a cero en caso contrario. Nuestras estrategias son las tres variantes de los armamentos; las estrategias del enemigo, las tres variantes de los aviones. El valor medio de la ganancia para cada par dado de estrategias no es,

* No se debe olvidar que en esa misma difícil situación se encuentra el adversario.

ni más ni menos, que la probabilidad de que sea derribado el avión dado con el armamento dado. La matriz del juego se encuentra aquí.

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	0,9	0,4	0,2
A_2	0,3	0,6	0,8
A_3	0,5	0,7	0,2

El objetivo de la teoría de los juegos es elaborar recomendaciones para obtener una actuación razonable de los jugadores en las situaciones de conflicto, o sea para definir "la estrategia óptima" de cada uno de ellos.

En la teoría de los juegos se llama *estrategia óptima* de un jugador a aquella que al repetirse reiteradamente el juego garantiza al jugador dado la ganancia media máxima posible (o lo que es lo mismo, la pérdida media mínima posible). Al elegir esta estrategia, el razonamiento básico está en la suposición de que el enemigo es por lo menos tan razonable como nosotros mismos y hace todo lo posible para evitar que consigamos nuestro objetivo.

En la teoría de los juegos todas las recomendaciones se elaboran partiendo precisamente de estos principios; por consiguiente, en ella no se toman en cuenta los elementos de riesgo que inevitablemente están presentes en cada estrategia real, ni tampoco los fallos y errores de cada uno de los jugadores.

La teoría de los juegos, como cualquier otro modelo matemático de un fenómeno complejo, tiene sus restricciones. La más importante de ellas consiste en que la ganancia se reduce artificialmente a un solo número. En la mayoría de las situaciones de conflicto prácticas al elaborar una estrategia razonable se tiene que poner atención no solamente a uno sino a varios parámetros que son criterios del éxito de las medidas. No es preciso que la estrategia que sea óptima, según un criterio, sea también óptima para los otros. No obstante, siendo conscientes de estas restricciones y por tanto sin atenerse ciegamente a las recomendaciones que se obtienen con los métodos de juego, se puede a pesar de todo emplear el aparato matemático de la teoría de los juegos para la elaboración si no exactamente de la "óptima", por lo menos de una estrategia "preferible".

§ 2. VALOR INFERIOR Y SUPERIOR DEL JUEGO. PRINCIPIO DEL "MÍN-MÁX"

Veamos un juego de $m \times n$ con la matriz siguiente:

A \ B	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
⋮	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Designaremos por i el número de nuestra estrategia; con la letra j el número de la estrategia del adversario.

Nos planteamos la tarea de definir nuestra estrategia óptima. Analicemos sucesivamente cada una de nuestras estrategias comenzando por A_1. Al elegir la estrategia A_i siempre tenemos que hacer el cálculo de que el adversario responderá con una de las estrategias B_j para la cual nuestra ganancia será la mínima. Determinemos este valor de la ganancia o sea el menor entre los números a_{ij} de la línea i. Designémoslo α_i:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \tag{2.1}$$

Aquí con $\min_j$ (el mínimo por j) se designa el mínimo de los valores de este parámetro para cualquier j.

Apuntemos los números α_i a la derecha de la matriz en una columna adicional.

A \ B	B_1	B_2	...	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	α_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m
β_i	β_1	β_2	...	β_m	

Al elegir cualquier estrategia A_i debemos calcular que como resultado de las acciones razonables del adversario no ganaremos más que α_i. Es natural que actuando con la mayor prudencia y tomando en cuenta que nuestro adversario deberá ser lo más razonable posible (o sea evitando cualquier riesgo) tenemos que elegir la estrategia A_i a la que le corresponde el valor máximo del número α_i. Designemos este valor máximo por α:

$$\alpha = \max_i \alpha_i,$$

o, según la fórmula (2.1),

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}$$

La magnitud α se llama *valor inferior del juego* o, de otra forma, *la ganancia máx-mín*, o simplemente *máx-mín*.

El número α se encuentra en una determinada línea de la matriz; la estrategia del jugador A que corresponde a esta línea se le llama *estrategia máx-mín*.

Es evidente que si nos atenemos a la estrategia máx-mín *tendremos garantizada* para cualquier conducta del adversario *una ganancia que en cualquier caso será no menor que* α. Por eso la magnitud α se llama "valor inferior del juego". Este es el mínimo garantizado que nos podemos asegurar manteniéndonos con la estrategia más prudente (la "requetesegura").

Evidentemente, pueden hacerse reflexiones semejantes a favor del adversario B. Nuestro adversario está interesado en llevar nuestra ganancia al mínimo, para eso debe examinar cada estrategia suya desde el punto de vista de su ganancia máxima al emplearla. Por ello, en la parte inferior de la matriz anotamos los valores máximos de a_{ij} de cada columna:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

y así encontraremos el menor de los β_j:

$$\beta = \min_j \beta_j$$

o bien,

$$\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij}.$$

La magnitud β se llama *valor superior del juego* o, de otra forma, el "mín-máx". La estrategia del adversario que corresponde a la ganancia mín-máx se le llama su "estrategia mín-máx".

Ateniéndose a su estrategia mín-máx más prudente, el adversario se garantiza lo siguiente: independientemente de lo que

emprendamos contra él, *la suma de su pérdida en cualquier caso no será mayor que* β.

El principio de la precaución que les dicta a los jugadores el empleo de las estrategias correspondientes (la máx-mín y la mín-máx) en la teoría de los juegos y en sus aplicaciones es llamado con frecuencia "principio del mín-máx". Las estrategias máx-mín y mín-máx más prudentes de los jugadores suelen denominarse con el término general de "estrategias mín-máx".

En calidad de ejercicios definamos el valor inferior y superior del juego y las estrategias mín-máx para los ejemplos 1,2 y 3 del § 1.

Ejemplo 1. En el ejemplo 1 del § 1 se da un juego con la matriz presentada.

B / A	B_1	B_2	α_i
A_1	1	−1	−1
A_2	−1	1	−1
β_j	1	1	

Como las magnitudes α_i y β_j son constantes e iguales respectivamente a -1 y $+1$, los valores inferior y superior del juego también son iguales a -1 y $+1$.

$$\alpha = -1; \quad \beta = +1.$$

Cualquier estrategia del jugador A es su máx-mín y cualquier estrategia del jugador B, su estrategia mín-máx. La conclusión es sencilla: ateniéndose a cualquiera de sus estrategias el jugador A puede garantizar que no perderá más de 1; lo mismo puede también garantizar el jugador B.

Ejemplo 2. En el ejemplo 2 del § 1 se da un juego con la siguiente matriz:

B / A	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	2	−3	4	−3
A_2	−3	4	−5	−5
A_3	4	−5	6	−5
β_j	4	4	6	

El valor inferior del juego es $\alpha = -3$; el valor superior, $\beta = 4$. Nuestra estrategia máx-mín será A_1; empleándola sistemáticamente podemos calcular con seguridad que ganaremos no menos de -3 (perderemos no más de 3). La estrategia mín-máx del adversario será cualquiera de las estrategias B_1 o B_2; empleándolas sistemáticamente en cualquier caso puede garantizar que perderá no mas de 4, si nosotros desistiésemos de nuestra estrategia máx-mín (por ejemplo eligiésemos la estrategia A_2), el adversario nos podría "castigar" por ello, empleando su estrategia B_3 y haciendo que nuestra ganancia sea -5; lo mismo que si el adversario desistiese de su estrategia mín-máx podría aumentar su pérdida hasta 6.

Ejemplo 3. En el ejemplo 3 del § 1 se da un juego con la matriz siguiente:

A \ B	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,9	0,4	0,2	0,2
A_2	0,3	0,6	0,8	**0,3**
A_3	0,5	0,7	0,2	0,2
β_j	0,9	**0,7**	0,8	

El valor inferior del juego es $\alpha = 0{,}3$; el valor superior, $\beta = 0{,}7$. Nuestra estrategia más prudente (la máx-mín) es la A_2, empleando el armamento A_2 garantizamos que vamos a derribar el avión con un promedio de no menos de 0,3 de todos los casos. La estrategia de más precaución (la mín-máx) del adversario es la B_2; empleando este avión el enemigo puede estar seguro de que podrá ser derribado en no más de 0,7 de todos los casos.

En este último ejemplo es fácil mostrar una de las importantes propiedades de las estrategias mín-máx, su inestabilidad. Supongamos el empleo por nuestra parte de la estrategia más prudente (la máx-mín), la A_2 y por parte del enemigo su estrategia de mayor precaución (la mín-máx), la B_2. Mientras los dos contrincantes mantengan estas estrategias, la ganancia media será 0,6, mayor que el valor inferior del juego pero menor que el superior. Ahora supongamos que el enemigo ha tenido conocimiento que empleamos la estrategia A_2, inmediatamente responderá con la estrategia B_1 y hará que la ganancia sea 0,3. A nuestro turno tenemos una buena respuesta a la estrategia B_1, que es la estrategia A_1, la que nos da una ganancia de 0,9, etc.

Así, la situación en la que los dos jugadores emplean sus estrategias mín-máx es inestable y puede ser perturbada por los datos que llegan sobre la estrategia del adversario.

No obstante, existen ciertos juegos para los cuales las estrategias mín-máx son estables. Esos son los que tienen su valor inferior igual al superior:

$$\alpha = \beta$$

Si el valor inferior del juego es igual al superior, su valor común se denomina *valor puro del juego* (a veces, sencillamente *el valor del juego*); lo designaremos con la letra v.

Veamos un ejemplo. El juego de 4 × 4 se da con la matriz siguiente:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	0,4	0,5	0,9	0,3	0,3
A_2	0,8	0,4	0,3	0,7	0,3
A_3	0,7	**0,6**	0,8	0,9	**0,6**
A_4	0,7	0,2	0,4	0,6	0,2
β_j	0,8	**0,6**	0,8	0,9	

El valor inferior del juego será:

$$\alpha = 0{,}6.$$

El valor superior del juego será:

$$\beta = 0{,}6.$$

Los dos resultaron iguales y por consiguiente el juego tiene un valor puro igual a $\alpha = \beta = v = 0{,}6$.

El elemento 0,6 encontrado en la matriz de pagos es simultáneamente *el menor en su línea y el mayor en su columna.* En geometría el punto de una superficie que tiene una propiedad semejante (el mínimo de una coordenada y el máximo de otra) se le llama *punto de silla.* Este término se emplea análogamente en la teoría de los juegos. Al elemento de la matriz que tiene esta propiedad se le llama *punto de silla de la matriz* y dicen del juego que *tiene punto de silla.*

Al punto de silla le corresponde un par de estrategias mín-máx (en este ejemplo A_3 y B_2). Estas estrategias se denominan *óptimas* y su conjunto, *la solución del juego.*

La solución del juego tiene la siguiente notable propiedad: si uno de los jugadores (por ejemplo A) se atiene a su estrategia óptima y el otro jugador (B) se desvía de cualquier manera de su trayectoria óptima, *esto nunca le puede resultar ventajoso al jugador que ha admitido esta desviación.* Tal desviación, en el mejor de los casos, puede dejar sin cambios la ganancia del juagador B y en el peor, aumentarla.

Por el contrario, si B se atiene a su estrategia óptima y A se desvía de la suya, esto en ninguno de los casos puede ser ventajoso para A.

Esta afirmación puede comprobarse fácilmente en el ejemplo examinado del juego con punto de silla.

Vemos que en el caso de juego con punto de silla las estrategias mín-máx gozan de una singular "estabilidad": si una de las partes se mantiene en su estrategia mín-máx, para la otra el desviarse de la suya puede ser sólo desventajoso. Observemos que en este caso si uno de los jugadores dispusiese del dato de que el adversario ha elegido su estrategia óptima esto no podría cambiar la conducta propia del jugador: si no quiere actuar en contra de sus propios intereses debe seguir su estrategia óptima. En el juego con punto de silla el par le estrategias óptimas es algo semejante a una "posición de equilibrio": cualquier desviación de la estrategia óptima lleva al jugador que se desvía a consecuencias desfavorables que le obligan a volver a la posición inicial.

Así que para cada juego con punto de silla existe la solución que determina el par de estrategias óptimas de las dos partes, caracterizadas por las propiedades siguientes:

1) Si las dos partes se rigen por sus estrategias óptimas, la ganancia media será igual al valor puro del juego ν, que es simultáneamente su valor inferior y superior.

2) Si una de las partes mantiene su estrategia óptima y la otra se desvía de la suya, ello conducirá a que la parte que se desvía sólo podrá perder y en ninguno de los casos podrá aumentar su ganancia.

La clase de juegos que tienen punto de silla presenta gran interés, tanto desde el punto de vista teórico como práctico.

En la teoría de los juegos se demuestra, en particular, que cada juego con información perfecta tiene punto de silla y en consecuencia cada juego de este tipo tiene solución, o sea, que existe un par de estrategias óptimas de una y otra parte que dan una ganancia media igual al valor del juego. Si el juego

con información perfecta se compone sólo de jugadas personales, al emplear cada parte su estrategia óptima ésta siempre tendrá que acabarse en un término enteramente definido, con una ganancia exactamente igual al valor del juego.

En calidad de juego con información perfecta citaremos el tan conocido en el que se colocan monedas en una mesa redonda. Dos jugadores colocan alternativamente monedas iguales en una mesa redonda, eligiendo cada vez cualquier lugar para el centro de la moneda. No se permite que una moneda tape a otra ni siquiera parcialmente. Gana el jugador que coloque la última moneda cuando ya no haya sitio para otra más. Es evidente que el final de este juego siempre está decidido de antemano y que existe una estrategia completamente determinada que asegura una victoria cierta al jugador que coloque la primera moneda. Precisamente la primera moneda debe colocarse en el centro de la mesa y a continuación contestar a cada jugada del adversario con una jugada simétrica. En este caso el segundo jugador puede comportarse de cualquier manera y no cambiará el resultado predeterminado del juego. Por eso este juego sólo tiene sentido para los jugadores que no conocen la estrategia óptima. Una cosa semejante ocurre con el ajedrez y otros juegos de información perfecta; cualquiera de estos juegos tiene punto de silla y solución que le indica a cada uno de los jugadores su estrategia óptima; la solución del juego de ajedrez no ha sido encontrada exclusivamente porque el número de combinaciones de las jugadas posibles es en el ajedrez demasiado grande para que se pueda construir la matriz de pagos y encontrar en ella el punto de silla.

§ 3. ESTRATEGIAS PURAS Y MIXTAS. SOLUCIÓN DE JUEGOS CON ESTRATEGIAS MIXTAS

Entre los juegos finitos que tienen importancia práctica es relativamente raro encontrar juegos con punto de silla. Es más típico el caso cuando los valores inferior y superior del juego son diferentes. Analizando las matrices de tales juegos llegamos a la conclusión de que si a cada jugador se le presenta la

posibilidad de elección de una sola estrategia, esta elección, calculando que tenemos un adversario que actúa razonablemente, debe determinarse por el principio del mín-máx. Ateniéndonos a nuestra estrategia máx-min, con cualquier conducta del adversario nos aseguramos con anticipación una ganancia igual al valor inferior del juego α. Surge una pregunta natural: ¿es posible asegurarse una ganancia media mayor que α si se emplea no una sola estrategia "pura", sino que se alternan en forma casual varias estrategias?

Tales estrategias combinadas, que consisten en el empleo de varias estrategias puras que alternan por una ley aleatoria con una determinada relación de frecuencias, en la teoría de los juegos se llaman *estrategias mixtas*.

Es evidente que cada estrategia pura es un caso particular de la mixta, en la cual todas las estrategias menos una se emplean con frecuencia cero y la dada, con frecuencia 1.

Resulta que al emplear no sólo estrategias puras, sino también mixtas, se puede obtener para cada juego finito una solución, o sea un par de estrategias (por lo general mixtas) tales que al ser empleadas por los dos jugadores originarán una ganancia igual al valor del juego; además, con cualquier desviación de la estrategia óptima por un jugador la ganancia sólo puede cambiar desfavorablemente para el que se desvió.

La afirmación enunciada es el contenido del llamado *teorema básico de la teoría de los juegos*. Este teorema lo demostró por primera vez John Neumann en el año 1928. Las demostraciones conocidas de este teorema son relativamente complicadas, y por lo tanto aquí sólo citaremos su enunciado.

Cada juego finito tiene, por lo menos, una solución (posiblemente en el campo de las estrategias mixtas).

La ganancia que se obtiene como fruto de la solución se llama valor del juego. Del teorema básico se deduce que cada juego finito tiene un valor. Es evidente que el valor del juego ν siempre se encuentra entre los valores inferior α y superior β del juego:

$$\alpha \leqslant \nu \leqslant \beta \tag{3.1}$$

Efectivamente, α es la máxima ganancia garantizada que nos podemos asegurar empleando sólo nuestras estrategias puras. Ya que las estrategias mixtas incluyen como caso particular también todas las puras, entonces admitiendo las estrategias mixtas, además de las puras, en cualquier caso no empeoramos nuestras posi-

bilidades y por consiguiente

$$\nu \geqslant \alpha$$

Examinando en forma análoga las posibilidades del adversario, mostraremos que

$$\nu \leqslant \beta$$

de lo que se deduce la desigualdad (3.1) a demostrar.

Introduciremos designaciones especiales para las estrategias mixtas. Si, por ejemplo, nuestra estrategia mixta consiste en el empleo de las estrategias A_1, A_2, A_3, con las frecuencias p_1, p_2, p_3 (teniendo en cuenta que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$) designaremos esta estrategia así:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, a la estrategia mixta del adversario la designaremos:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix},$$

donde q_1, q_2, q_3 son las frecuencias con las que se mezclan las estrategias B_1, B_2, B_3; $q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

Supongamos que hemos encontrado la solución del juego que consiste de dos estrategias óptimas mixtas S_A^*, S_B^*. En el caso general, no todas las estrategias puras accesibles a cada jugador entran en su estrategia óptima mixta, sino sólo algunas. Llamaremos a las estrategias que entran en la estrategia óptima mixta del jugador sus estrategias "útiles".

Resulta que la solución del juego goza de una notable propiedad más: *si uno de los jugadores se atiene a su estrategia óptima mixta S_A^* (S_B^*), la ganancia queda inalterable e igual al valor del juego* ν, *independientemente de lo que haga el otro jugador, a menos que él salga de los límites de sus estrategias "útiles".* Puede, por ejemplo, emplear cualquiera de sus estrategias "útiles" en forma pura o también mezclarlas en cualquier proporción.

Demostremos esta afirmación. Supongamos que exista la solución S_A^*, S_B^* del juego $m \times n$. Concretando, consideremos que la estrategia óptima mixta S_A^* consta de una mezcla de tres estrategias "útiles" A_1, A_2, A_3; S_B^* consta respectivamente de una

mezcla de tres estrategias "útiles" B_1, B_2, B_3:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}; \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

donde $p_1 + p_2 + p_3 = 1$; $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Se afirma que si nos atenemos a la estrategia S_A^*, el adversario puede emplear las estrategias B_1, B_2, B_3 en cualesquiera proporciones, pero la ganancia quedará inalterable y como antes será igual al valor del juego v.

Demostremos esto de la manera siguiente: supongamos que v_1, v_2, v_3 son las ganancias que se obtendrán con nuestra estrategia S_A^* y las estrategias del adversario B_1, B_2 y B_3 correspondientemente.

De la definición de estrategia óptima se deduce que cualquier desviación del adversario de la estrategia S_B^* no le puede ser conveniente, por eso:

$$v_1 \geqslant v; \quad v_2 \geqslant v; \quad v_3 \geqslant v.$$

Veamos si la magnitud v_1, v_2 ó v_3 puede resultar *mayor* que v aunque sea en uno de los tres casos. Resulta que no. Efectivamente, expresemos la ganancia v de las estrategias óptimas S_A^*, S_B^* con ayuda de las ganancias v_1, v_2, v_3. Puesto que en la estrategia S_B^* se emplean B_1, B_2 y B_3 con las frecuencias q_1, q_2, q_3 tendremos

$$v = v_1 q_1 + v_2 q_2 + v_3 q_3 \tag{3.2}$$

$$(q_1 + q_2 + q_3) = 1$$

Es evidente que si una sola de las magnitudes v_1, v_2, v_3 fuese mayor que v, su valor ponderable promedio (3.2) sería también mayor que v, lo cual contradice a la condición expuesta. Así se demuestra la importante propiedad de las estrategias óptimas que vamos a utilizar ampliamente en la solución de los juegos.

§ 4. MÉTODOS ELEMENTALES DE RESOLUCIÓN DE JUEGOS. JUEGOS DE 2×2 Y DE $2 \times N$

Si un juego de $m \times n$ no tiene punto de silla, el cálculo de su solución es, en general, un problema bastante difícil, sobre todo cuando m y n son grandes.

A veces se puede conseguir simplificar este problema si anticipadamente se disminuye el número de estrategias tachando algunas excedentes.

Las estrategias excedentes pueden ser a) duplicadas y b) a ciencia cierta desfavorables. Veamos, por ejemplo, un juego con la matriz siguiente:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	0	2	3	2
A_3	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

No es difícil convencerse de que la estrategia A_3 repite ("duplica") exactamente la estrategia A_1, por eso se puede tachar cualquiera de estas dos estrategias.

Continuemos, comparando las líneas A_1 y A_2 miembro a miembro vemos que cada elemento de la línea A_2 es menor (o igual) que su elemento correspondiente de la línea A_1. Es evidente que nosotros nunca debemos emplear la estrategia A_2; sabemos de antemano que es desfavorable. Tachando A_3 y A_2 daremos una forma más simple a la matriz.

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Observemos ahora que para el adversario la estrategia B_3 es a ciencia cierta desfavorable, tachándola llevaremos la matriz

a su aspecto final (vea abajo). Así que al tachar las estrategias duplicadas y desfavorables a ciencia cierta, el juego de 4 × 4 se reduce a un juego de 2 × 3.

A \ B	B_1	B_2	B_4
A_1	1	2	3
A_4	4	3	0

El proceso de reducción de la matriz siempre debe preceder a la resolución del juego.

Los casos más simples de juegos finitos que siempre se pueden resolver con procedimientos elementales son los juegos de 2 × 2 y de 2 × m.

A \ B	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Veamos un juego de 2 × 2 con la matriz dada. Aquí pueden encontrarse dos casos: 1) el juego tiene punto de silla; 2) el juego no tiene punto de silla. La solución del primer caso es evidente: es un par de estrategias que se cruzan en el punto de silla. Observaremos, a propósito, que en el juego de 2 × 2 la presencia de punto de silla siempre corresponde a la existencia de estrategias a ciencia cierta desfavorables, las cuales deben ser tachadas en el análisis previo *).

Supongamos que no haya punto de silla y en consecuencia el valor inferior del juego no sea igual al superior: $\alpha \neq \beta$. Se requiere encontrar la estrategia óptima mixta del jugador A:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Esta se distingue por la propiedad de que cualesquiera que fuesen las acciones del adversario (sin salirse de los límites de sus estrategias "útiles"), la ganancia será igual al valor del juego v. En el juego de 2 × 2 las dos estrategias del adversario son "útiles" pues de otro modo el juego tendría solución compuesta de estrategias puras (punto de silla). Esto significa que si nos

*) Se propone al lector comprobar esto en una serie de matrices de 2 × 2.

regimos por nuestra estrategia óptima $S^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, el adversario puede emplear cualquiera de sus estrategias puras sin alterar la ganancia media v. De aquí resultan dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \mathrm{v}, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = \mathrm{v}, \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

de las cuales, teniendo en cuenta que $p_1 + p_2 = 1$, obtendremos

$$a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1),$$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{4.2}$$

Encontraremos el valor del juego v colocando el valor de p_1, p_2 con cualquiera de las ecuaciones (4.1).

Si se conoce el valor del juego es suficiente una ecuación para determinar la estrategia óptima del adversario $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$, por ejemplo:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \mathrm{v}$$

de donde, teniendo en cuenta que $q_1 + q_2 = 1$, obtenemos

$$q_1 = \frac{\mathrm{v} - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \quad q_2 = 1 - q_1$$

Ejemplo 1. Encontrar la solución del juego 2×2, que se examina en el ejemplo 1 del § 1, con la matriz

B / A	B_1	B_2
A_1	1	−1
A_2	−1	1

El juego no tiene punto de silla ($\alpha = -1$; $\beta = +1$) y por lo tanto la solución debe encontrarse en la región de las estrategias mixtas.

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}; \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Hay que hallar p_1, p_2, q_1 y q_2.

Para p_1 tenemos la ecuación:

$$1 \cdot p_1 + (-1)(1 - p_1) = (-1) \cdot p_1 + 1(1 - p_1)$$

de donde

$$p_1 = \frac{1}{2}; \quad p_2 = \frac{1}{2}.$$

Análogamente,

$$q_1 = \frac{1}{2}; \quad q_2 = \frac{1}{2}; \quad v = 0.$$

En consecuencia, la estrategia óptima para cada uno de los jugadores consiste en alternar de modo casual sus dos estrategias puras, empleando cada una de ellas con la misma frecuencia; la ganancia media entonces será igual a cero.

La conclusión recibida ya antes estaba lo suficientemente clara. En el ejemplo siguiente examinaremos un juego más complicado, cuya solución no es tan evidente. El ejemplo es un modelo elemental de los juegos conocidos con el nombre de juegos con "engaño" o "inducción al error". En la práctica, en las situaciones de conflicto se emplean con frecuencia diversos procedimientos para inducir al adversario al error (desinformación, mantenimiento aparente de objetivos falsos, etc.). A pesar de su sencillez, el ejemplo es bastante instructivo.

Ejemplo 2. El juego consiste en lo siguiente: se tienen dos cartas: un as y un dos. El jugador A toma al azar una de ellas; B no ve qué carta ha sacado él. Si A ha cogido el as anuncia: "Yo tengo el as" y le exige al adversario un rublo. Si A saca el dos puede o bien A_1) anunciar "yo tengo el as" y exigirle al adversario 1 rublo, o bien A_2) reconocer que tiene el dos y pagarle al adversario 1 rublo.

El adversario, cuando le pagan voluntariamente un rublo, sólo puede aceptarlo. Ahora bien, si le exigen 1 rublo el puede o B_1) creer que el jugador A tiene el as y darle 1 rublo, o B_2) exigir que le enseñe la carta para comprobar que la afirmación de A es justa. Si resulta que verdaderamente A tiene el as, B le debe de pagar 2 rublos. Si resulta que A le engaña y tiene el dos entonces paga a B 2 rublos.

Hay que analizar el juego y encontrar la estrategia óptima de cada uno de los jugadores.

Resolución. El juego tiene una estructura relativamente complicada; ésta se compone de una jugada de azar obligatoria (el jugador A debe elegir una de las dos cartas) y de dos jugadas personales que, sin embargo, no tienen que realizarse obligatoriamente. En efecto, si A sacó el as, no hizo ninguna jugada personal: a él se le presenta sólo una posibilidad, exigir 1 rublo, que es lo que hace. En este caso, la jugada personal, creer o no creer (o sea pagar o no pagar 1 rublo) se le transmite al jugador B. Si A, como resultado de su primera jugada de azar, obtiene el dos, se le presenta una jugada personal: pagar 1 rublo o tratar de engañar al adversario y exigirle 1 rublo (digamos: "no engañar" o "engañar"). Si A elige lo primero, a B no le queda más que recibir 1 rublo; si A escoge lo segundo, al jugador B se le presenta una jugada personal: creerle o no creerle (o sea pagar a A 1 rublo o exigirle la comprobación).

La estrategia de cada uno de los jugadores consta de reglas que indican lo que debe de hacer el jugador cuando se le presenta una jugada personal.

Es evidente que A tiene sólo dos estrategias:

A_1 – engañar, A_2 – no engañar.

B también tiene dos estrategias:

B_1 – creerle, B_2 – no creerle.

Construyamos la matriz del juego. Para eso calculemos la ganancia media de cada combinación de estrategias.

1. A_1B_1 (A engaña, B le cree).

Si A saca el as $\left(\text{la probabilidad es } \frac{1}{2}\right)$ entonces ya no tiene jugada personal; exige 1 rublo y el jugador B le cree: la ganancia de A en rublos es igual a 1.

Si A saca el dos $\left(\text{la probabilidad de eso también es } \frac{1}{2}\right)$, de acuerdo con su estrategia engaña y exige 1 rublo; B le cree y paga: la ganancia de A también es igual a 1.

La ganancia media:

$$a_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.$$

2. A_1B_2 (A engaña, B no le cree).

Si A saca el as no tiene jugada personal; él exige 1 rublo; B de acuerdo con su estrategia no le cree y como resultado de la comprobación paga 2 rublos (la ganancia de A es igual a $+2$).

Si A saca el dos de acuerdo con su estrategia exige 1 rublo; B de acuerdo con la suya no le cree; en resultado A paga 2 rublos (la ganancia de A es igual a -2). La ganancia media será igual a:

$$a_{12} = \frac{1}{2}\cdot(+2) + \frac{1}{2}\cdot(-2) = 0.$$

3. A_2B_1 (A no engaña, B le cree).

Si A saca el as, exige 1 rublo; B de acuerdo con su estrategia paga; la ganancia de A es igual a $+1$. Si A saca el dos, de acuerdo con su estrategia paga 1 rublo; a B le queda sólo el recibirlo (la ganancia de A es igual a -1). La ganancia media es igual a:

$$a_{21} = \frac{1}{2}\cdot(+1) + \frac{1}{2}\cdot(-1) = 0.$$

4. A_2B_2 (A no engaña, B no le cree).

Si A saca el as, exige 1 rublo; B comprueba y como resultado de la comprobación paga 2 rublos (la ganancia es igual a $+2$).

Si A saca el dos, paga 1 rublo; a B sólo le queda aceptarlo (la ganancia es igual a -1).

La ganancia media es igual a:

$$a_{22} = \frac{1}{2}\cdot(+2) + \frac{1}{2}\cdot(-1) = \frac{1}{2}.$$

Construimos la matriz del juego.

A \ B	B_1 (creer)	B_2 (no creer)
A_1 (engañar)	1	0
A_2 (no engañar)	0	$\frac{1}{2}$

La matriz no tiene punto de silla. El valor inferior del juego es $\alpha = 0$, el valor superior $\beta = \frac{1}{2}$. Encontremos la solución del juego en el terreno de las estrategias mixtas. Empleando

la fórmula (4.2), obtendremos:

$$p_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}; \quad p_2 = \frac{2}{3}, \quad S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

o sea, que el jugador A debe en un tercio de todos los casos emplear su primera estrategia (engañar) y en dos tercios, la segunda (no engañar). Así ganará por término medio el valor del juego

$$\nu = \frac{1}{3}.$$

El valor $\nu = \frac{1}{3}$ atestigua que en estas condiciones el juego es ventajoso para A y es desfavorable para B. Empleando su estrategia óptima, A siempre puede asegurarse una ganancia media positiva.

Observaremos que si A emplease su estrategia más prudente (la máx-mín) tendría una ganancia media igual a cero (en este caso ambas estrategias, A_1 y A_2, son máx-mín). De este modo el empleo de una estrategia mixta le da a A la posibilidad de sacar provecho de su ventaja sobre B, la que surgió con las reglas del juego dadas.

Determinemos la estrategia óptima de B. Tenemos:

$$q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot 0 = \frac{1}{3}; \quad q_1 = \frac{1}{3}; \quad q_2 = \frac{2}{3},$$

de donde $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, o sea que el jugador B debe en un tercio de todos los casos creer a A y pagarle 1 rublo sin comprobarle y en dos tercios, le debe comprobar. Entonces él en cada juego, por término medio, perderá $\frac{1}{3}$. Si él emplease su estrategia mín-máx pura B_2 (no creer), en cada juego perdería en promedio $\frac{1}{2}$.

A la resolución de un juego 2×2 se le puede dar una sencilla interpretación geométrica. Supongamos que hay un juego de 2×2 con la matriz.

A \ B	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Tomemos una sección del eje de abscisas de longitud 1 (fig. 4.1). El extremo izquierdo de la sección (el punto con la abscisa $x = 0$) representará la estrategia A_1; el extremo derecho de la sección ($x = 1$), la estrategia A_2. Tracemos por los puntos A_1 y A_2 las perpendiculares al eje de las abscisas: el eje *I-I* y el eje *II-II*.

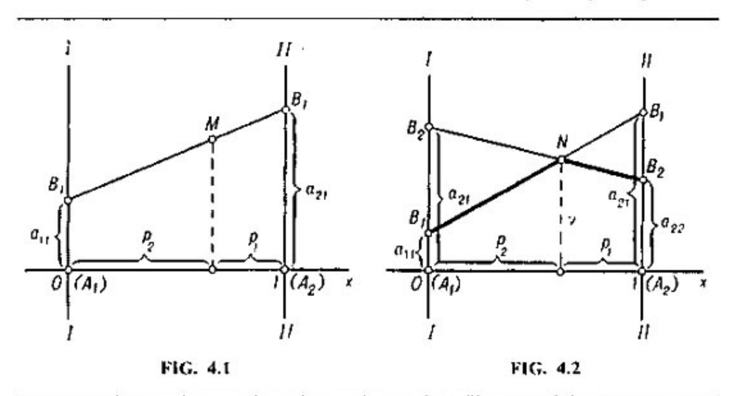


FIG. 4.1 FIG. 4.2

Marcaremos en el eje *I-I* las ganancias con la estrategia A_1, en el eje *II-II*, las ganancias con la estrategia A_2. Examinemos la estrategia del adversario B_1; ésta da dos puntos en los ejes *I-I* y *II-II* con las coordenadas a_{11} y a_{21} respectivamente. Tracemos por estos puntos la recta B_1B_1. Es evidente que si para la estrategia B_1 del adversario vamos a emplear la estrategia mixta $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ entonces nuestra ganancia media, que será en este caso $a_{11}p_1 + a_{12}p_2$, estará representada por el punto M en la recta B_1B_1; la abscisa de este punto es igual a p_2. Llamaremos condicionalmente "estrategia B_1" a la recta B_1B_1 que representa la ganancia con la estrategia B_1.

Es evidente que exactamente con este mismo procedimiento se puede construir la estrategia B_2 (fig. 4.2).

Tenemos que encontrar la estrategia óptima S_A^*, o sea aquella para la cual la ganancia mínima (con cualquier conducta de B) llegue al máximo. Para eso construiremos *el límite inferior de la ganancia* con las estrategias B_1, B_2 o sea la línea quebrada B_1NB_2 marcada con trazo grueso en la fig. 4.2. Este límite inferior expresará la ganancia mínima del jugador A con cualquiera de sus estrategias mixtas, el punto N en el que esta ganancia mínima alcanza el máximo es el que determina la solución y el valor del juego. No es difícil convencerse de que la ordenada del punto N es el valor del juego v y su abscisa es igual

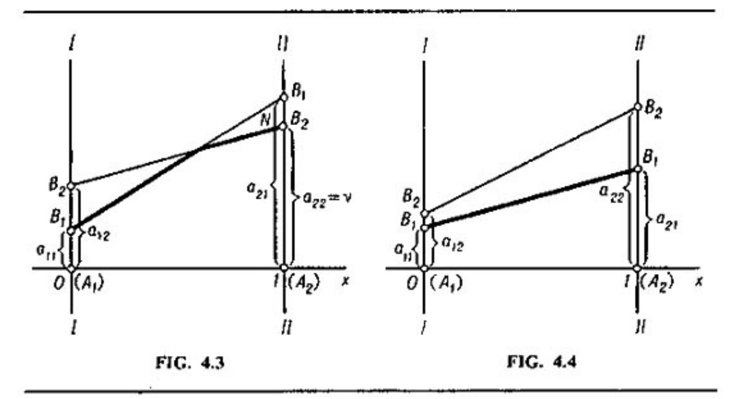


FIG. 4.3 FIG. 4.4

a p_2, la frecuencia del empleo de la estrategia A_2 en la estrategia óptima mixta S_A^*.

En nuestro caso, la solución del juego se determinó con el punto de intersección de las estrategias. Sin embargo, no siempre va a ser así; en la fig. 4.3 se muestra un caso en el cual, a pesar de que la intersección existe, la solución da a los dos jugadores estrategias puras (A_2 y B_2), y el valor del juego $v = a_{22}$.

La matriz tiene en este caso punto de silla y la estrategia A_1 es a ciencia cierta desfavorable, puesto que a cualquier estrategia del adversario ella da menor ganancia que A_2.

En caso de que el adversario tenga una estrategia a ciencia cierta desfavorable, la interpretación geométrica toma el aspecto representado en la fig. 4.4.

En este caso el límite inferior de la ganancia coincide con la estrategia B_1; para el adversario la estrategia B_2 es a ciencia cierta desfavorable.

La interpretación geométrica da también la posibilidad de representar con claridad los valores inferior y superior del juego (fig. 4.5). Para ilustrarlo, construiremos la interpretación geométrica de los juegos de 2×2 que se examinaron en los ejemplos 1 y 2 (fig. 4.6 y 4.7).

Nos hemos convencido de que todos los juegos de 2×2 pueden ser resueltos con procedimientos elementales. De manera completamente análoga puede ser resuelto cualquier juego de $2 \times n$ en el que tengamos sólo dos estrategias y el adversario un número cualquiera.

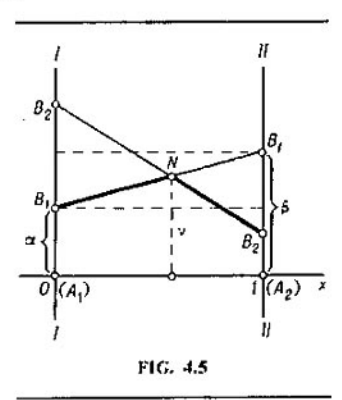


FIG. 4.5

Supongamos que tenemos dos estrategias: A_1, A_2 y el adversario, n estrategias: B_1, B_2, ..., B_n. Está dada la matriz $\| a_{ij} \|$ formada por dos líneas y n columnas. Análogamente al caso de las dos estrategias daremos al problema una interpretación geométrica; las n estrategias del adversario se representarán con n rectas (fig. 4.8). Construimos el límite inferior de la ganancia (la línea quebrada B_1MNB_2) y hallamos en ella el punto N con la ordenada máxima. Este punto da la solución del juego (la estrategia $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$; la ordenada del punto N es igual al valor del juego v y la abscisa es igual a la frecuencia p_2 de la estrategia A_2.

En este caso, la estrategia óptima del adversario se compone de la mezcla de dos estrategias "útiles": B_2 y B_4 que se cruzan en el

punto N. La estrategia B_3 es a ciencia cierta desfavorable y la estrategia B_1 no es ventajosa para el caso de la estrategia óptima S_A^*. Si A se rige por su estrategia óptima la ganancia no cambiará, independientemente de cuál de sus estrategias "útiles" emplee B; no obstante puede variar si B pasa a las estrategias B_1 o B_3.

En la teoría de los juegos se demuestra que en cualquier juego finito de $m \times n$ existe una solución en la que el número de estrategias "útiles" de una y otra parte no supera al menor de los dos números m y n. De esto se deduce en particular que en el juego de $2 \times m$ siempre existe una solución en la que una y otra parte pueden haber no más de dos estrategias "útiles".

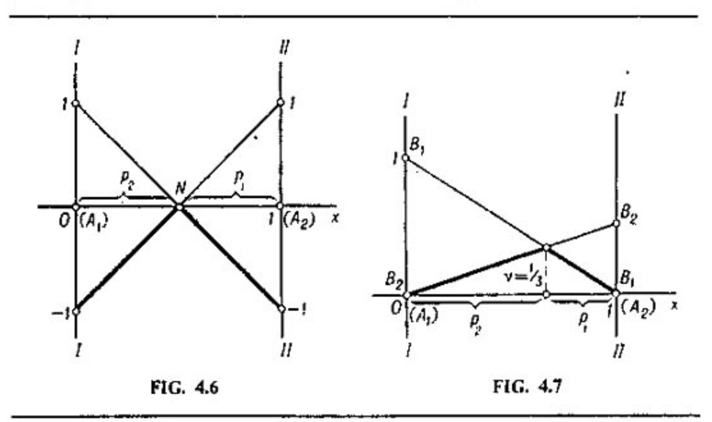


FIG. 4.6 FIG. 4.7

Empleando la interpretación geométrica se puede dar un procedimiento sencillo de solución para cualquier juego de $2 \times m$. En el dibujo se encuentran directamente un par de estrategias "útiles" del adversario B_j y B_k que se cruzan en el punto N (si en el punto N se cruzan más de dos estrategias tomamos dos cualesquiera de ellas). Sabemos que si el jugador A se atiene a su estrategia óptima, la ganancia no depende de la proporción con la que B emplee sus estrategias "útiles", en consecuencia,

$$\left.\begin{array}{l} p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} = v, \\ p_1 a_{1k} + p_2 a_{2k} = v. \end{array}\right\}$$

a partir de estas ecuaciones y de la condición $p_2 = 1 - p_1$ encontraremos p_1, p_2 y el valor del juego v.

Conociendo el valor del juego se puede inmediatamente determinar la estrategia óptima $S_B^* = \begin{pmatrix} B_j & B_k \\ q_j & q_k \end{pmatrix}$ del jugador B.

Para esto, por ejemplo, se resuelve la ecuación:

$$q_j a_{1j} + q_k a_{1k} = v,$$

en la que

$$q_j + q_k = 1.$$

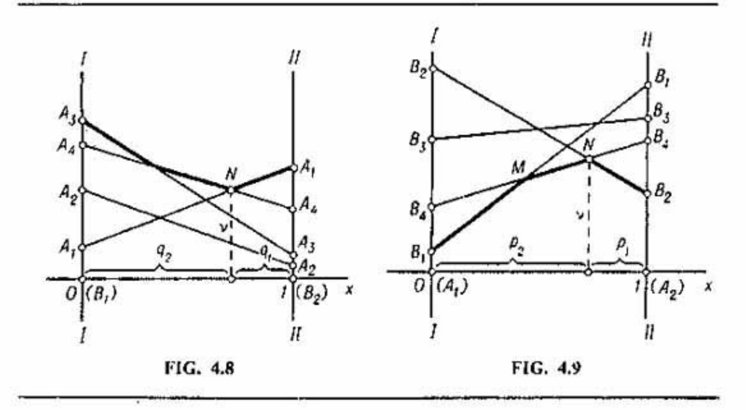


FIG. 4.8

FIG. 4.9

Si nosotros disponemos de m estrategias y el adversario sólo de dos es evidente que el problema se resuelve con un procedimiento totalmente análogo; es suficiente observar que cambiando el signo de la ganancia por el contrario se puede convertir al jugador A de "el que gana" a "el que pierde". Se puede también resolver el juego sin cambiar el signo a la ganancia; entonces el problema se resuelve directamente para B pero se construye no el límite inferior, sino el superior de la ganancia (fig. 4.9). En el límite se busca el punto N con la ordenada mínima, que es precisamente el valor del juego v.

Examinemos y solucionemos varios ejemplos de juegos de 2×2 y de $2 \times m$ que son modelos simplificados de juegos que tienen importancia práctica.

Ejemplo 3. El bando A manda al lugar de concentración del enemigo B dos aviones de bombardeo el I y el II; el I vuela delante y el II detrás. Uno de los aviones (de antemano no se sabe cuál) llevará una bomba, el otro cumple función de escolta. En la zona del enemigo los aviones son atacados por un avión de caza de B. Los aviones de bombardeo están armados con cañones de diferente velocidad. Si el caza ataca el avión de detrás (el II) le harán fuego sólo los cañones de este avión; si ataca al primero le harán fuego los cañones de los dos aviones de bombardeo. La probabilidad de derribar el avión de caza en el primer caso es 0,3; en el segundo es 0,7.

Si el avión de caza no es derrumbado con el fuego defensivo de los aviones de bombardeo, él derriba el objetivo elegido con una probabilidad de 0,6. La tarea de los aviones de bombardeo consiste en llevar la bomba hasta el objetivo; la tarea del caza evitar esto, o sea, derribar el avión portador. Hay que elegir la estrategia óptima de cada parte:

a) para A: ¿Cuál de los aviones de bombardeo debe ser el portador?

b) para B: ¿A cuál de los aviones de bombardeo atacar?

Resolución. Tenemos un caso simple de juego de 2×2; la ganancia es la probabilidad de que no derriben el portador.

Nuestras estrategias:

A_1 – el portador es el avión I;

A_2 – el portador es el avión II.

La estrategia del enemigo:

B_1 – se ataca el avión de bombardeo I;

B_2 – se ataca el avión de bombardeo II.

Componemos la matriz del juego o sea encontramos la ganancia media con cada combinación de las estrategias.

1. A_1B_1 (el portador es el I, se ataca el I).

El portador no será derribado si los aviones de bombardeo derriban al de caza o no le derribarán pero él no hará blanco en su objetivo.

$$a_{11} = 0,7 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,82$$

2. A_2B_1 (el portador es el II, se ataca el I)

$$a_{21} = 1.$$

3. A_1B_2 (el portador es el I, se ataca el II)

$$a_{12} = 1.$$

4. A_2B_2 (el portador es el *II*, se ataca el *II*)

$$a_{22} = 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}58$$

La matriz del juego tiene la forma:

A \ B	B_1	B_2
A_1	0,82	1
A_2	1	0,58

El valor inferior del juego es 0,82; el superior, 1. La matriz no tiene punto de silla; buscamos la solución en el terreno de las estrategias mixtas.

Tenemos:

$$p_1 \cdot 0{,}82 + p_2 \cdot 1 = \nu$$
$$p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 0{,}58 = \nu$$
$$p_2 = 1 - p_1.$$

de donde

$$p_1 = 0{,}7; \quad p_2 = 0{,}3.$$

Nuestra estrategia óptima será

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix},$$

o sea, en calidad de portador hay que elegir con más frecuencia al *I* que el *II*. El valor del juego es igual a

$$\nu = 0{,}874.$$

Conociendo ν, calculamos q_1 y q_2 la frecuencia de las estrategias B_1 y B_2 en la estrategia óptima del enemigo S_B^*. Tendremos

$$q_1 \cdot 0{,}82 + q_2 \cdot 1 = 0{,}874;$$
$$q_2 = 1 - q_1,$$

de donde

$$q_1 = 0{,}7; \quad q_2 = 0{,}3;$$

o sea que la estrategia óptima del enemigo será

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4. La parte A ataca un objetivo, la parte B lo defiende. La parte A dispone de dos aviones; la parte B, de tres cañones antiaéreos. Cada avión es portador de una potente arma de destrucción; para que el objetivo sea destruido basta que se abra paso hasta él aunque sea un avión. Los aviones de A pueden elegir para llegar al objetivo cualesquiera de las direcciones I, II ó III (fig. 4.10).

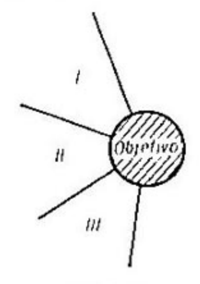


FIG. 4.10

El enemigo (la parte B) puede colocar cualquiera de sus cañones en cualesquiera de las direcciones; cada cañón sólo podrá hacer impacto en el espacio de la dirección dada y no en el de las direcciones vecinas. Cada cañón puede hacer fuego solamente a un avión; el avión abatido se derriba con la probabilidad 1. La parte A no sabe donde están colocados los cañones; la parte B no sabe por donde vendrán los aviones. La tarea de la parte A es destruir el objetivo; la tarea de la parte B, no permitir su destrucción. Encuéntrese la solución del juego.

Resolución. Esto resulta ser un juego de 2×3. La ganancia es la probabilidad de la destrucción del objetivo. Nuestras posibles estrategias son:

A_1 – mandar un avión por cada una de las dos direcciones diferentes.

A_2 – mandar los dos aviones en una sola dirección.

La estrategia del enemigo será:

B_1 – colocar un cañón en cada dirección.

B_2 – colocar dos cañones en una dirección y uno en otra.

B_3 – colocar los tres cañones en una sola dirección.

Compondremos la matriz del juego.

1. A_1B_1 (los aviones vuelan por diferentes direcciones; cada cañón está colocado en una dirección).

Es evidente que así no se abrirá paso ni un solo avión al objetivo:

$$a_{11} = 0.$$

2. A_2B_1 (los aviones vuelan juntos en una dirección; cada cañón está colocado en una dirección). Es evidente que así un avión se abrirá paso al objetivo sin ser derribado:

$$a_{21} = 1.$$

3. A_1B_2 (cada avión vuela en diferente dirección; el enemigo defiende dos direcciones y deja de defender la tercera). La probabilidad de que aunque sea un avión se abra paso al objetivo será igual a la probabilidad de que uno de ellos elija la dirección vulnerable.

$$a_{12} = \frac{2}{3}.$$

4. A_2B_2 (los aviones vuelan juntos en una dirección; el enemigo defiende una dirección con dos cañones y otra, con uno o sea que de hecho defiende una sola dirección y deja vulnerables dos). La probabilidad de que aunque sea un avión se abra paso hasta el objetivo es igual a la probabilidad de que el par de aviones elija una de las direcciones que de hecho han quedado sin defensa:

$$a_{22} = \frac{2}{3}.$$

5. A_1B_3 (los aviones vuelan en diferentes direcciones; el enemigo defiende con los tres cañones solo una dirección).

$$a_{13} = 1.$$

6. A_2B_3 (los aviones vuelan juntos; el enemigo defiende con los tres cañones solo una dirección). Para que el objetivo sea destruido los aviones tienen que elegir una de las direcciones que quedaron sin defensa:

$$a_{23} = \frac{2}{3}.$$

La matriz del juego es:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	0	$^2/_3$	1
A_2	1	$^2/_3$	$^2/_3$

En la matriz se ve que la estrategia B_3 es a ciencia cierta desventajosa con relación a la B_2 (eso se hubiese podido resolver antes). Tachando la estrategia B_3 el juego se reduce a un juego 2×2.

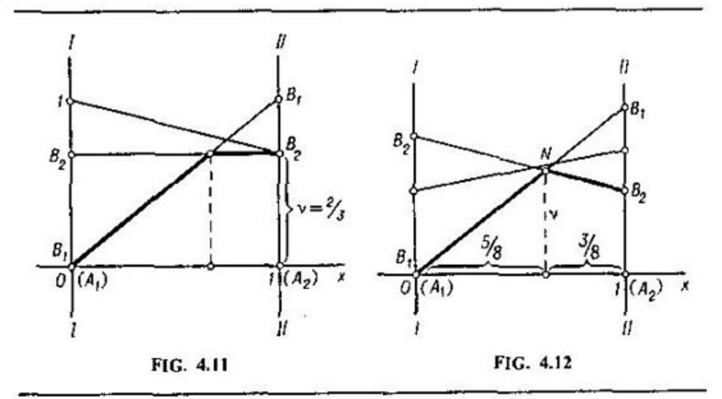


FIG. 4.11 FIG. 4.12

A \ B	B_1	B_2
A_1	0	$^2/_3$
A_2	1	$^2/_3$

La matriz tiene punto de silla: el valor inferior del juego $\frac{2}{3}$ coincide con el superior.

Al mismo tiempo observaremos que para nosotros (A) la estrategia A_1 es a ciencia cierta desfavorable. En consecuencia: las dos partes A y B deben siempre emplear sus estrategias puras A_2 y B_2 o sea, debemos mandar los dos aviones juntos eligiendo

aleatoriamente la dirección por la que los mandamos; el enemigo debe colocar los cañones así: dos en una dirección y uno en otra, la elección de estas direcciones también debe realizarse aleatoriamente (aquí, como vemos, las "estrategias puras" ya incluyen el elemento aleatorio). Empleando estas estrategias óptimas siempre obtendremos una ganancia media constante $\frac{2}{3}\left(\text{o sea el objetivo será destruido con una probabilidad de } \frac{2}{3}\right)$.

Observemos que la solución encontrada del juego no es la única; aparte de la solución compuesta de estrategias puras existe un sector entero de estrategias mixtas óptimas del jugador A, desde $p_1 = 0$ hasta $p_1 = \frac{1}{3}$ (fig. 4.11). Es fácil, por ejemplo, convencerse de que la misma ganancia media $\frac{2}{3}$ se obtendrá si empleamos nuestras estrategias A_1 y A_2 en las proporciones de $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

Ejemplo 5. Las mismas condiciones del ejemplo anterior, pero tenemos cuatro posibles direcciones de ataque y el enemigo dispone de cuatro cañones.

Resolución. Tenemos como en los casos anteriores dos estrategias posibles:

A_1 – mandar los aviones aparte,

A_2 – mandar los dos aviones juntos.

El enemigo tiene cinco estrategias posibles:

$B_1\,(1 + 1 + 1 + 1)$ – colocar un cañón en cada dirección;

$B_2\,(2 + 2)$ – colocar dos cañones en cada una de las dos direcciones diferentes;

$B_3\,(2 + 1 + 1)$ – colocar dos cañones en una dirección y uno en cada una de las otras dos direcciones;

$B_4\,(3 + 1)$ – colocar tres cañones en una dirección y uno en otra;

$B_5\,(4)$ – colocar los cuatro cañones en una sola dirección.

De antemano prescindiremos de las estrategias B_4 y B_5 como desventajosas a ciencia cierta. Haciendo razonamientos semejantes

a los del ejemplo anterior construimos la matriz del juego

$A \backslash B$	B_1 (1+1+ +1+1)	B_2 (2+2)	B_3 (2+1+1)
A_1	0	$^5/_6$	$^1/_2$
A_2	1	$^1/_2$	$^3/_4$

El valor inferior del juego es $\frac{1}{2}$, el superior, $\frac{3}{4}$.

La matriz no tiene punto de silla, la solución se encuentra entre las estrategias mixtas. Empleando la interpretación geométrica (fig. 4.12) destacaremos las estrategias "útiles" del enemigo: B_1 y B_2.

Las frecuencias p_1 y p_2 se determinan a partir de las ecuaciones

$$p_1 \cdot 0 + (1 - p_1) \cdot 1 = v;$$
$$p_1 \cdot \frac{5}{6} + (1 - p_1) \cdot \frac{1}{2} = v,$$

de donde

$$p_1 = \frac{3}{8}; \; p_2 = \frac{5}{8}; \quad v = \frac{5}{8},$$

o sea que nuestra estrategia óptima es:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

Al emplearla nos aseguramos una ganancia media de $\frac{5}{8}$. Conociendo el valor del juego $v = \frac{5}{8}$ encontramos la frecuencia q_1 y q_2 de las estrategias "útiles" del enemigo:

$$q_1 \cdot 0 + (1 - q_1) \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{8},$$

$$q_1 = \frac{1}{4}; \quad q_2 = \frac{3}{4}.$$

La estrategia óptima del enemigo será:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 6. La parte A dispone de dos estrategias A_1 y A_2, la parte B, de cuatro $B_1 B_2$, B_3 y B_4. La matriz del juego es la siguiente:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	4	10	12
A_2	8	4	3	2

Encuéntrese la solución del juego.

Resolución. El valor inferior del juego es 0,3; el superior 0,4. La interpretación geométrica (fig. 4.13) muestra que las estrategias

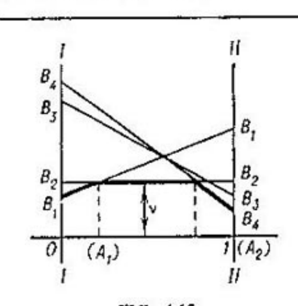


FIG. 4.13

útiles del jugador B son B_1 y B_2 o B_2 y B_4. El jugador A tiene un número infinito de estrategias óptimas mixtas: en la estrategia óptima p_1 puede variar desde $\frac{1}{5}$ hasta $\frac{4}{5}$. El valor del juego es $v = 4$. El jugador B tiene la estrategia óptima pura B_2.

§ 5. MÉTODOS GENERALES DE RESOLUCIÓN DE JUEGOS FINITOS

Hasta ahora sólo hemos examinado los juegos más elementales del tipo de $2 \times n$, que pueden ser resueltos muy fácilmente y que admiten una interpretación geométrica cómoda y evidente.

En el caso general, la resolución de juegos de $m \times n$ representa un problema bastante difícil, la complicación y la cantidad de cálculos necesarios para su resolución crecen bruscamente al aumentar m y n. Sin embargo, estas dificultades no son de principio y sólo están ligadas a una cantidad de cálculos muy grande que en una serie de casos pueden resultar prácticamente irrealizables. La parte fundamental del método de búsqueda de solución es la misma para cualquier m.

Ilustremos esto en el ejemplo del juego de $3 \times n$. Le daremos su interpretación geométrica, ahora ya espacial. En la superficie xOy representaremos nuestras tres estrategias A_1, A_2 y A_3 con tres puntos; el primero se encuentra en el origen de las coordenadas (fig. 5.1), el segundo y el tercero, en los ejes Ox y Oy a la distancia 1 del origen.

Por los puntos A_1, A_2 y A_3 perpendicularmente a la superficie xOy se trazan los ejes $I-I$, $II-II$ y $III-III$. En el eje $I-I$ se marca la ganancia con la estrategia A_1, en los ejes $II-II$ y $III-III$, la ganancia con las estrategias A_2, A_3. Cada estrategia del adversario B_j se representa con una superficie que corte en los ejes $I-I$, $II-II$ y $III-III$ segmentos iguales a las ganancias con las estrategias correspondientes A_1, A_2, A_3 y la estrategia B_j. Construyendo de esta manera todas las estrategias del adversario obtendremos una familia de superficies sobre el triángulo A_1, A_2, A_3 (fig. 5.2). Para esta familia también se puede construir el límite inferior de la ganancia como lo hicimos en el caso del juego de $2 \times n$ y encontrar en ese límite el punto N con la altura máxima sobre la superficie xOy. Esta altura será el valor del juego v. Las frecuencias p_1, p_2, p_3 de las estrategias A_1, A_2, A_3 en la estrategia óptima S_A^* se determinarán con las coordenadas (x, y) del punto N y serán:

$$p_2 = x; \quad p_3 = y; \quad p_1 = 1 - p_2 - p_3.$$

No obstante, una construcción geométrica tal, incluyendo el caso de $3 \times n$, no es fácilmente realizable y exige gran gasto de

tiempo y esfuerzo de imaginación. En el caso general del juego ésta se traspasa a un espacio m-dimensional y pierde toda su evidencia a pesar de que el empleo de la terminología geométrica en una serie de casos puede resultar útil. Al resolver juegos de $m \times n$ en la práctica es más cómodo emplear no análogos geométricos sino métodos analíticos de cálculo, sobre todo teniendo en cuenta que para la resolución de los problemas en las máquinas computadoras estos métodos son los únicos útiles. Todos estos métodos, en esencia,

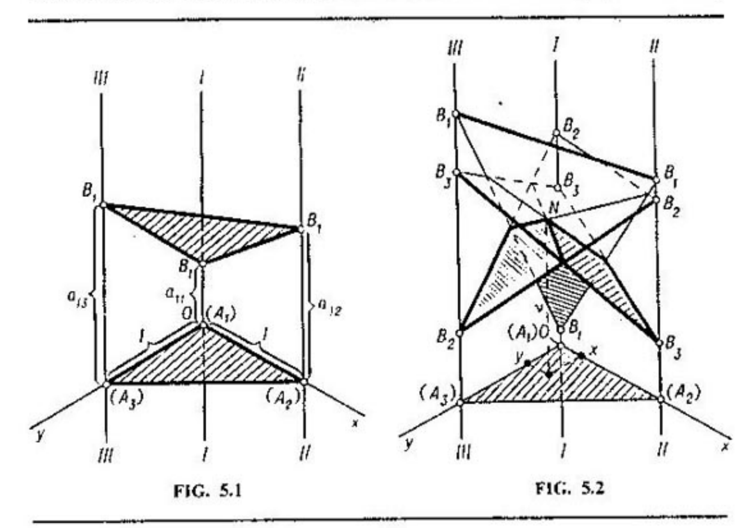


FIG. 5.1 FIG. 5.2

se reducen a la resolución del problema a base de una sucesión de pruebas; ahora bien, la ordenación de la sucesión de las pruebas permite construir un algoritmo que conduce a la solución del modo más económico.

Aquí nos detendremos brevemente en un método de cálculo de resolución de juegos de $m \times n$, en el método llamado de "programación lineal".

Para esto expondremos ante todo el planteamiento general del problema de la búsqueda de la solución del juego de $m \times n$. Supongamos que se da un juego de $m \times n$ con m estrategias A_1, A_2, ..., A_m del jugador A y n estrategias B_1, B_2, ..., B_n del jugador B y se da la matriz de pagos $\| a_{ij} \|$.

Hay que encontrar la solución del juego o sea dos estrategias óptimas mixtas de los jugadores A y B.

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}; \qquad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

donde $p_1 + \dots + p_m = 1$; $q_1 + \dots + q_n = 1$ (algunos de los números p_i y q_j pueden ser igual a cero).

Nuestra estrategia óptima S_A^* debe asegurarnos una ganancia no menor que v con cualquier conducta del adversario y una ganancia igual a v con su estrategia óptima (la estrategia S_B^*). En forma análoga la estrategia S_B^* deberá asegurar al adversario una pérdida no mayor que v con cualquier conducta nuestra e igual a v con nuestra conducta óptima (la estrategia S_A^*).

La suma del valor del juego en el caso dado nos es desconocida; consideraremos que será igual a cierto número positivo. Suponiéndolo así nosotros no infringimos la generalidad de los razonamientos; para que sea $v > 0$, evidentemente, es suficiente que todos los elementos de la matriz $\| a_{ij} \|$ no sean negativos. Esto siempre se puede conseguir añadiendo a los elementos $\| a_{ij} \|$ una magnitud positiva L lo suficientemente grande; entonces el valor del juego aumentará en L y la solución no cambiará.

Supongamos que hayamos elegido ya nuestra estrategia óptima S_A^*. Entonces nuestra ganancia media con la estrategia del adversario B_j será igual a:

$$a_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \dots + p_m a_{mj}.$$

Nuestra estrategia óptima posee la propiedad de que asegura con cualquier conducta del adversario una ganancia no menor que v, en consecuencia cualquiera de los números a_j no puede ser menor que v. Obtenemos una serie de condiciones:

$$\left.\begin{aligned} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \dots + p_m a_{m1} &\geqslant v, \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \dots + p_m a_{m2} &\geqslant v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \dots + p_m a_{mn} &\geqslant v. \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

Dividimos las desigualdades (5.1) por la magnitud positiva v y designamos

$$\frac{p_1}{v} = \xi_1; \quad \frac{p_2}{v} = \xi_2; \; \dots ; \quad \frac{p_m}{v} = \xi_m.$$

Entonces la condición (5.1) se anotará de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m \geqslant 1, \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m \geqslant 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m \geqslant 1, \end{array}\right\} \quad (5.2)$$

donde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ no son números negativos. Puesto que $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$, tenemos que las magnitudes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ satisfacen la condición:

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m = \frac{1}{v}. \quad (5.3)$$

Queremos hacer que nuestra ganancia asegurada sea la máxima posible; es evidente que en este caso el segundo miembro de la igualdad (5.3) tomará un valor mínimo.

Así que el problema de la búsqueda de solución del juego se reduce al siguiente problema matemático: *calcular las magnitudes no negativas* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ *que satisfagan la condición* (5.2) *de manera que su suma*

$$\Phi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m$$

sea la mínima.

Corrientemente, al resolver problemas relacionados con la búsqueda de valores extremos (máximos y mínimos), diferencian la función e igualan las derivadas a cero. Pero en este caso tal procedimiento es inútil, ya que la función Φ que hay que reducir al mínimo es lineal y sus derivadas para todos los argumentos son iguales a uno o sea que en ninguna parte se convierten en cero. En consecuencia, el máximo de la función se alcanza en algún lugar del límite de la región de variación de los argumentos que se determina por la exigencia de que los argumentos no sean negativos y por las condiciones (5.2). El procedimiento de cálculo de valores extremos por medio de la diferenciación tampoco puede utilizarse en aquellos casos en que para la resolución del juego se determina el máximo del límite inferior (o el mínimo del superior) de la ganancia como lo hacíamos, por ejemplo, para resolver juegos de $2 \times n$. En efecto, el límite inferior está compuesto de segmentos de líneas rectas y el máximo se consigue no en el punto donde la derivada es igual a cero (no existe un punto tal), sino en el límite del intervalo o en el punto de intersección de las rectas.

Para resolver semejantes problemas (que se encuentran en la práctica con bastante frecuencia) en la matemática se ha elaborado un conjunto de procedimientos especiales de *programación lineal.*

El problema de programación lineal se plantea del modo siguiente:

Se da un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m = b_1, \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m = b_n. \end{array}\right\} \quad (5.4)$$

Hay que encontrar los valores no negativos de las magnitudes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ que satisfagan las condiciones (5.4) y al mismo tiempo que reduzcan al mínimo la función lineal homogénea dada de las magnitudes $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ (la forma lineal)

$$\Phi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_m\xi_m.$$

Es fácil convencerse de que el problema expuesto anteriormente sobre la teoría de los juegos es un caso particular del problema de la programación lineal en el que $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 1$.

A primera vista puede parecer que las condiciones (5.2) no equivalen a las condiciones (5.4) puesto que en lugar de los signos de igualdad aparecen signos de desigualdad. No obstante es fácil librarse de los signos de desigualdad, incluyendo las nuevas variables ficticias no negativas $z_1, z_2, \ldots, z_n$ y escribiendo las condiciones (5.2) así:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m - z_1 = 1, \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m - z_2 = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m - z_n = 1. \end{array}\right\} \quad (5.5)$$

La función Φ que hay que reducir al mínimo es igual a

$$\Phi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m.$$

La programación lineal permite por medio de una sucesión de pruebas relativamente poco numerosa escoger los valores de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ que satisfagan las exigencias planteadas. Para más claridad aquí mostraremos el empleo directo de estos métodos en el caso de solución de juegos concretos.

Ejemplo 1. Se requiere encontrar la solución del juego 3 × 3 dado en el ejemplo 2 del § 1 con la matriz

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	−3	4
A_2	−3	4	−5
A_3	4	−5	6

Para hacer que todos los a_{ij} sean no negativos añadiremos a todos los elementos de la matriz $L = 5$. Obtendremos la matriz:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

Entonces el valor del juego aumentará en 5 y la solución no cambiará.

Determinemos la estrategia óptima S_A^*. Las condiciones(5.2) tienen la forma:

$$\left.\begin{aligned} 7\xi_1 + 2\xi_2 + 9\xi_3 &\geqslant 1, \\ 2\xi_1 + 9\xi_2 \qquad &\geqslant 1, \\ 9\xi_1 + \qquad 11\xi_3 &\geqslant 1, \end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

donde $\xi_1 = \frac{p_1}{v}$; $\xi_2 = \frac{p_2}{v}$; $\xi_3 = \frac{p_3}{v}$.

Para librarse de los signos de desigualdad introduciremos las variables ficticias z_1, z_2, z_3; las condiciones (5.6) adquieren el especto siguiente:

$$\left.\begin{aligned} 7\,\xi_1 + 2\,\xi_2 + 9\,\xi_3 - z_1 &= 1, \\ 2\,\xi_1 + 9\,\xi_2 \qquad - z_2 &= 1, \\ 9\,\xi_1 + \qquad 11\,\xi_3 - z_3 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

La forma lineal Φ será:

$$\Phi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

y deberá hacerse lo menor posible.

Si las tres estrategias de B fuesen "útiles", las tres variables ficticias z_1, z_2, z_3 se convertirían en cero (o sea que la ganancia, igual al valor del juego ν se va a conseguir con cada estrategia B_j). Pero por ahora no tenemos fundamento para afirmar que las tres estrategias son "útiles". Para comprobar esto intentemos expresar la función Φ mediante las variables ficticias z_1, z_2, z_3 y veamos si conseguimos el mínimo de la forma suponiéndolas igual a cero. Para eso resolvamos las ecuaciones (5.7) con relación a las variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 (o sea expresaremos ξ_1, ξ_2, ξ_3 por medio de las variables ficticias z_1, z_2, z_3):

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{20} - \frac{99}{80} z_1 + \frac{11}{40} z_2 + \frac{81}{80} z_3, \\ \xi_2 &= \frac{1}{10} + \frac{11}{40} z_1 + \frac{1}{20} z_2 - \frac{9}{40} z_3, \\ \xi_3 &= \frac{1}{20} + \frac{81}{80} z_1 - \frac{9}{40} z_2 - \frac{59}{80} z_3. \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Sumando ξ_1, ξ_2 y ξ_3 obtendremos:

$$\Phi = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} z_1 + \frac{1}{10} z_2 + \frac{1}{20} z_3. \tag{5.9}$$

En la expresión (5.9) los coeficientes de todas las z son positivos; eso quiere decir que cualquier aumento de z_1, z_2, z_3 mayor de cero sólo puede llevar al aumento de la función Φ, pero nosotros queremos que ésta sea mínima. En consecuencia, los valores de z_1, z_2, z_3 que hacen mínima la función (5.9) son

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0.$$

Colocándolos en la fórmula (5.9) encontramos el valor mínimo de la función Φ:

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{5},$$

de donde el valor del juego será:

$$\nu = 5.$$

Colocando los valores cero de z_1, z_2, z_3 en la fórmula (5.8) encontraremos

$$\xi_1 = \frac{1}{20}; \quad \xi_2 = \frac{1}{10}; \quad \xi_3 = \frac{1}{20},$$

y multiplicándolos por v,

$$p_1 = \frac{1}{4}; \quad p_2 = \frac{1}{2}; \quad p_3 = \frac{1}{4}.$$

Así que se ha encontrado la estrategia óptima de A

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

o sea que debemos en una cuarta parte de todos los casos escribir la cifra 1, en la mitad de los casos, la 2 y en la cuarta parte restante, la 3.

Conociendo el valor del juego $v = 5$ se puede encontrar, con los métodos ya conocidos, la estrategia óptima del adversario

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}.$$

Para eso utilicemos dos cualesquiera de nuestras estrategias "útiles" (por ejemplo A_2 y A_3) y escribamos las ecuaciones:

$$2q_1 + 9q_2 = 5$$

$$9q_1 + 11(1 - q_2 - q_1) = 5$$

de donde $q_1 = q_3 = \frac{1}{4}$; $q_2 = \frac{1}{2}$. La estrategia óptima del adversario será la misma que la nuestra:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Volvamos ahora al juego inicial (todavía no reformado). Para ello sólo hace falta sustraer del valor del juego $v = 5$ la magnitud $L = 5$, que se añadió a los elementos de la matriz. Obtendremos el valor del juego inicial $v_0 = 0$. La deducción consiste en que las estrategias óptimas de las dos partes aseguran una ganancia media igual a cero; el juego es en la misma medida ventajoso o desventajoso para las dos partes.

Ejemplo 2. El club deportivo A dispone de tres variantes de composición de su equipo A_1, A_2 y A_3. El club B, también de tres variantes B_1, B_2 y B_3. Al hacer la solicitud para la participación

en un campeonato ninguno de los clubes conoce la alineación que elegirá el contrario. La probabilidad de la victoria del club A con diferentes variantes de composición de su equipo es más o menos conocida por la experiencia de los encuentros anteriores. Esto se expresa en la matriz

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	0,8	0,2	0,4
A_2	0,4	0,5	0,6
A_3	0,1	0,7	0,3

Hay que encontrar la frecuencia con la cual los clubes deben presentar cada una de las alineaciones en los encuentros mutuos para conseguir el promedio máximo del número de victorias.

Resolución. El valor inferior del juego es 0,4; el superior, 0,6; buscamos la solución en la región de las estrategias mixtas. Para no tener decimales multiplicamos todos los elementos de la matriz por 10; entonces el valor del juego aumentará en 10 veces y la solución no cambiará. Obtendremos así la matriz siguiente:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	8	2	4
A_2	4	5	6
A_3	1	7	3

Las condiciones (5.5) tomarán la forma:

$$\left.\begin{aligned} 8\xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3 - z_1 &= 4, \\ 2\xi_1 + 5\xi_2 + 7\xi_3 - z_2 &= 1, \\ 4\xi_1 + 6\xi_2 + 3\xi_3 - z_3 &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

y la condición del mínimo

$$\Phi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \text{mín.}$$

Comprobamos si son "útiles" las tres estrategias del adversario. En calidad de hipótesis al principio supondremos que las variables ficticias z_1, z_2, z_3 son iguales a cero. Para comprobarlo, resolveremos

las ecuaciones (5.10) con relación a ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{10}{136} + \frac{27}{136} z_1 + \frac{6}{136} z_2 - \frac{23}{136} z_3,\\ \xi_2 &= \frac{12}{136} - \frac{22}{136} z_1 - \frac{20}{136} z_2 + \frac{54}{136} z_3,\\ \xi_3 &= \frac{8}{136} + \frac{8}{136} z_1 + \frac{32}{136} z_2 - \frac{32}{136} z_3,\end{aligned}\right\}$$

de donde

$$136\Phi = 30 + 13z_1 + 18z_2 - 51z_3. \qquad (5.12)$$

La fórmula (5.12) muestra que el aumento de las variables z_1 y z_2 con relación a su supuesto valor cero solamente puede hacer aumentar a Φ, mientras que el aumento de z_3 puede hacer disminuir a Φ. No obstante, hay que realizar con prudencia el aumento de z_3 para que las magnitudes ξ_1, ξ_2, ξ_3, que dependen de z_3, no se hagan negativas. Por eso pondremos en el segundo miembro de las igualdades (5.11) las magnitudes z_1 y z_2 igual a cero y aumentaremos la magnitud z_3 hasta el límite admisible (hasta que alguna de las magnitudes ξ_1, ξ_2, ξ_3 se convierta en cero). En la segunda igualdad (5.11) observamos que con el aumento de z_3 la magnitud ξ_3 "está exenta de peligro", con eso ella solamente aumentará. En lo que se refiere a las magnitudes ξ_1 y ξ_2, aquí es admisible el aumento de z_3 sólo hasta cierto límite. La magnitud ξ_1 se convierte en cero con $z_3 = \frac{10}{23}$; la magnitud ξ_3 se convierte en cero antes, ya con $z_3 = \frac{1}{4}$. En consecuencia, dando a z_3 su valor máximo admisible $z_3 = \frac{1}{4}$, nosotros haremos que la magnitud ξ_3 sea igual a cero.

Para comprobar si la función Φ se hace mínima con $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, expresaremos las otras variables (las no iguales a cero) por medio de z_1, z_2, ξ_3 las que suponemos igual a cero.

Resolviendo las ecuaciones (5.10) con relación a ξ_1, ξ_2 y z_3 obtendremos:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} z_1 - \frac{4}{32} z_2 + \frac{23}{32} \xi_3,\\ \xi_2 &= \frac{6}{32} - \frac{2}{32} z_1 + \frac{8}{32} z_2 - \frac{54}{32} \xi_3,\\ z_3 &= \frac{8}{32} + \frac{8}{32} z_1 + z_2 - \frac{136}{32} \xi_3,\end{aligned}\right\}$$

de donde

$$32\Phi = 7 + 3z_1 + 4z_2 + \xi_3. \qquad (5.13)$$

De la fórmula (5.13) se deduce que cualquier aumento de las magnitudes z_1, z_2, ξ_3 sobre sus supuestos valores cero solamente puede conducir a un aumento de la función Φ. En consecuencia, se ha encontrado la solución del juego; ésta se determina con los valores

$$z_1 = z_2 = \xi_3 = 0,$$

de ahí

$$\xi_1 = \frac{1}{32}; \quad \xi_2 = \frac{3}{16}; \quad z_3 = \frac{1}{4}.$$

Colocándolos en la fórmula (5.13) encontraremos el valor del juego ν:

$$32\Phi = 7 = \frac{32}{\nu}; \quad \nu = \frac{32}{7}.$$

Nuestra estrategia óptima será:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Las estrategias "útiles" (las composiciones A_1 y A_2) deben emplearse con las frecuencias $\frac{1}{7}$ y $\frac{6}{7}$; la composición A_3 no debe usarse nunca.

En el caso general, para encontrar la estrategia óptima del adversario se puede proceder así: cambiar por el contrario el signo de la ganancia, añadir a los elementos de la matriz la magnitud constante L para hacerlos no negativos, y resolver el problema para el adversario lo mismo que lo hemos resuelto para nosotros. No obstante, el hecho de que ya conozcamos el valor del juego ν en cierta medida simplifica la tarea. Además, en este caso concreto, el problema tiene otra simplificación complementaria puesto que en su solución participan sólo dos estrategias "útiles" del adversario, la B_1 y la B_2, ya que la magnitud z_3 no es igual a cero y entonces con la estrategia B_3 no se alcanza el valor del juego. Eligiendo cualquier estrategia "útil" del jugador A, por ejemplo A_1, se pueden encontrar las frecuencias q_1 y q_2. Para ello anotaremos la ecuación

$$8q_1 + 2(1 - q_1) = \frac{32}{7},$$

de donde

$$q_1 = \frac{3}{7}; \quad q_2 = \frac{4}{7};$$

la estrategia óptima del adversario será:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix},$$

o sea que el adversario no debe emplear la composición B_3 y las composiciones B_1 y B_2 se deben emplear con las frecuencias $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{7}$.

Volviendo a la matriz inicial determinaremos el valor real del juego

$$v_0 = \frac{32}{7} : 10 = 0{,}457.$$

Eso quiere decir que si el número de encuentros es grande, el número de victorias del club A será el 0,457 de todos los encuentros.

§ 6. MÉTODOS APROXIMADOS DE RESOLUCIÓN DE JUEGOS

En los problemas prácticos frecuentemente no hay necesidad de encontrar una solución exacta del juego; es suficiente encontrar una solución aproximada que dé una ganancia media cercana al valor del juego. Un análisis sencillo de la matriz y la determinación del valor inferior (α) y superior (β) del juego pueden dar un conocimiento aproximado del valor del juego v. Si α y β son cercanos, no hay necesidad práctica de realizar la búsqueda de una solución exacta, será suficiente elegir las estrategias min-máx puras. Cuando α y β no sean cercanos se puede obtener una solución admisible para la práctica con ayuda de los métodos numéricos de resolución de juegos. De éstos examinaremos brevemente el método de *iteraciones*.

La idea del método de iteraciones se reduce a lo siguiente: se juega a un "experimento mental" en el cual los adversarios A y B emplean uno contra otro sus estrategias. El experimento consta de una sucesión de juegos elementales, cada uno de los cuales tiene su matriz del juego dado. Se comienza con que nosotros (el jugador A) elegimos en forma arbitraria una de nuestras estrategias, por ejemplo la A_i. El adversario contesta con su estrategia B_j menos ventajosa para nosotros, o sea que lleva al mínimo la ganancia de la estrategia A_i. A esta jugada contestamos con nuestra estrategia A_k que dé la ganancia media máxima al emplear el adversario la estrategia B_j. De nuevo le conduce el turno al adversario. El responde a nuestras dos jugadas A_i y A_k con la estrategia que nos dé la menor ganancia media con nuestras dos estrategias (la A_i y la A_k), etc. En cada paso del proceso iterativo cada jugador responde a cualquier jugada del otro jugador con la estrategia que sea óptima con relación a todas las jugadas anteriores del adversario, examinadas como cierta estrategia mixta en la que las estrategias puras están representadas en las proporciones correspondientes a la frecuencia de su empleo.

Este procedimiento, podríamos decir, es una especie de modelo real de "aprendizaje" de los jugadores en el cual cada uno de ellos en el experimento estudia el posible modo de conducta del adversario y procura responderle de la forma más ventajosa para sí mismo.

Si esta imitación del proceso de aprendizaje se prolonga un tiempo suficientemente largo, la ganancia media correspondiente a un par de jugadas (a un juego elemental) tenderá a igualarse al valor del juego y las frecuencias $p_1, ..., p_m; q_1, ..., q_n$ con las que se encuentran las estrategias de los jugadores en esta competición se acercará a las frecuencias que determinan la estrategia óptima. Los cálculos muestran que la convergencia del método es muy lenta; sin embargo, esto no es un obstáculo para las veloces máquinas de computación.

Ilustremos el empleo del método iterativo en el caso del juego de 3×3, resuelto en el ejemplo 2 del párrafo anterior.

El juego se da con la matriz:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	8	2	4
A_2	4	5	6
A_3	1	7	3

Tabla 6.1

n	i	B_1	B_2	B_3	j	A_1	A_2	A_3	$\underline{v}$	$\bar{v}$	v^*
1	3	1	7	3	1	8	4	1	1	8	4,50
2	1	9	9	7	3	12	10	4	3,50	6,00	4,75
3	1	17	11	11	2	14	15	11	3,67	5,00	4,33
4	2	21	16	17	2	16	20	18	4,00	5,00	4,50
5	2	25	21	23	2	18	25	25	4,20	5,00	4,60
6	2	29	26	29	2	20	30	32	4,33	5,33	4,82
7	3	30	33	32	1	28	34	33	4,29	4,86	4,57
8	2	34	38	38	1	36	38	34	4,25	4,75	4,50
9	2	38	43	44	1	44	42	35	4,23	4,89	4,56
10	1	46	45	48	2	46	47	42	4,50	4,70	4,60
11	2	50	50	54	1	54	51	43	4,55	4,91	4,72
12	1	58	52	58	2	56	56	50	4,33	4,66	4,49
13	2	62	57	64	2	58	61	57	4,38	4,70	4,54
14	2	66	62	70	2	60	66	64	4,43	4,71	4,56
15	2	70	67	76	2	62	71	71	4,47	4,73	4,60
16	3	71	74	79	1	70	75	72	4,44	4,69	4,56
17	2	75	79	85	1	78	79	73	4,41	4,65	4,53
18	2	79	84	91	1	86	83	74	4,39	4,78	4,58
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

En la tabla 6.1 se presentan los primeros 18 pasos del proceso iterativo. En la primera columna aparece el número de orden del juego elemental (del par de jugadas) n; en la segunda, el número i de la estrategia elegida por el jugador A; en las tres siguientes, "la ganancia acumulada" en los primeros n juegos con las estrategias B_1, B_2, B_3 del adversario. De estos valores, el menor está subrayado. En las columnas siguientes se encuentran el número j de la estrategia elegida por el adversario y correspondientemente la ganancia acumulada en n juegos con las estrategias A_1, A_2, A_3; entre estos valores, los mayores están señalados con una rayita por encima. Los valores señalados determinan la elección de la estrategia con la que contestará el otro jugador. En las columnas restantes se indica sucesivamente: la ganancia media mínima $\underline{v}$ que es igual a la ganancia mínima acumulada dividida por la cantidad de juegos n; la ganancia media máxima $\bar{v}$ que es igual a la ganancia máxima acumulada dividida por n y la media aritmética de estas dos $v^* = \frac{\underline{v} + \bar{v}}{2}$. Al aumen-

tar n, las tres magnitudes $\underline{v}$, $\bar{v}$ y v^* se van acercando al valor del juego v, pero la magnitud v^*, como es natural, se acercará a él de una manera relativamente más rápida.

Como se deduce del ejemplo, la convergencia de las iteraciones es muy lenta, no obstante un pequeño cálculo como éste da posibilidad de encontrar los valores aproximados del valor del juego y revelar el prevalecimiento de las estrategias "útiles". Al emplear las máquinas computadoras el valor del método aumenta considerablemente.

La ventaja del método iteracional de resolución de juegos está en que la cantidad y la complejidad de los cálculos crecen relativamente poco al aumentar el número de estrategias m y n.

§ 7. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE CIERTOS JUEGOS INFINITOS

Juego infinito se denomina a un juego en el que por lo menos uno de los adversarios tiene una cantidad infinita de estrategias. Los métodos generales de resolución de tales juegos están todavía poco elaborados. Sin embargo, para la práctica pueden ser de interés casos particulares que tienen una solución relativamente sencilla.

Veamos el juego de dos adversarios A y B en el cual cada uno de ellos tiene una cantidad infinita (incontable) de estrategias; estas estrategias para el jugador A corresponden a diferentes valores del parámetro x que cambia constantemente y para el B, del parámetro y. En el caso dado, en lugar de la matriz $\| a_{ij} \|$, el juego está determinado por cierta función $a(x, y)$ de dos argumentos que varían constantemente, a la que llamaremos *función de la ganancia* (observaremos que la propia función $a(x, y)$ no tiene que ser obligatoriamente continua. La función de la ganancia $a(x, y)$ puede representarse geométricamente como una cierta superficie que se encuentra sobre la región de los cambios de los argumentos (x, y) (véase la fig. 7.1).

El análisis de la función de la ganancia $a(x, y)$ se realiza en forma similar al análisis de la matriz de pagos. Primero se encuentra el valor inferior del juego α; para ello se determina para cada x el mínimo de la función $a(x, y)$ entre todas las y:

$$\min_y a(x, y);$$

después se busca el máximo de estos valores entre todas las x (el máx-mín):

$$\alpha = \max_{x} \min_{y} \; a(x, y).$$

El valor superior del juego (el mín-máx) se determina análogamente:

$$\beta = \min_{y} \max_{x} \; a(x, y).$$

Veamos el caso en el que $\alpha = \beta$. Como el valor del juego v siempre se encuentra entre α y β, su valor general será precisamente v.

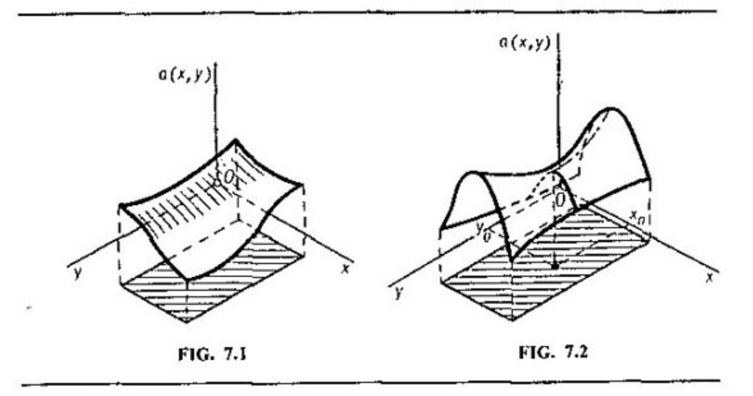


FIG. 7.1 FIG. 7.2

La igualdad $\alpha = \beta$ significa que la superficie $a(x, y)$ tiene *punto de silla*, o sea un punto tal con las coordenadas x_0, y_0, en el cual $a(x, y)$ es al mismo tiempo el mínimo entre las y y el máximo entre las x (fig. 7.2).

El valor de $a(x, y)$ en este punto es el valor del juego v:

$$v = a(x_0 y_0).$$

La existencia del punto de silla significa que este juego infinito tiene solución en el terreno de las estrategias puras; x_0, y_0 son las estrategias óptimas puras de A y B. En el caso general cuando $\alpha \neq \beta$ el juego puede tener solución sólo en la región de estrategias mixtas (posiblemente no sólo la única). La estrategia mixta para los juegos infinitos será una cierta distribución de probabilidades para las estrategias x e y examinándolas como magnitudes aleatorias. Esta distribución puede ser continua y determinarse por las densidades $f_1(x)$ y $f_2(y)$; puede ser discreta en cuyo caso la estrategia óptima constará de un conjunto de estrategias puras aisladas que se eligen con

determinadas probabilidades diferentes de cero. Para el caso en el que el juego infinito no tiene punto de silla se puede dar una clara interpretación geométrica del valor inferior y superior del juego. Veamos un juego infinito con la función de la ganancia $a(x, y)$ y con las estrategias x, y que cubren en forma continua los segmentos de los ejes (x_1, x_2) y (y_1, y_2). Para determinar el valor inferior del juego α hay que "mirar" la superficie $a(x, y)$ desde el eje y o sea proyectarla en el plano xOa (fig. 7.3). Obtendremos cierta figura limitada a los

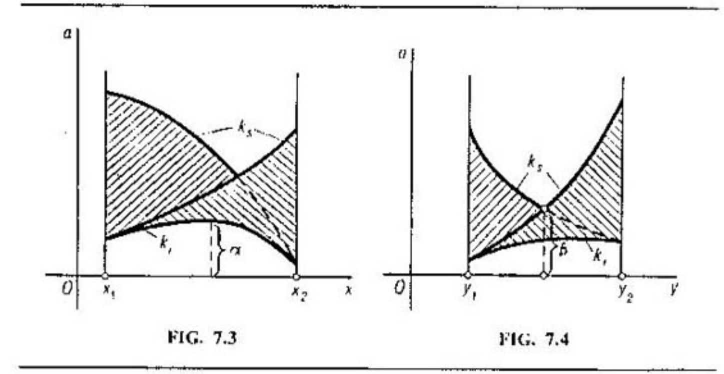


FIG. 7.3 FIG. 7.4

lados por las rectas $x = x_1$ y $x = x_2$; y arriba y abajo, por las curvas K_s y K_i. Es evidente que el valor inferior α del juego no es más que la ordenada máxima de la curva K_i. Análogamente, para encontrar el valor superior del juego β habrá que "mirar" la superficie $a(x, y)$ desde el eje Ox (proyectar la superficie en el plano yOa) y encontrar la ordenada mínima de la proyección del límite superior K_s (fig. 7.4).

Examinemos dos ejemplos elementales de juegos infinitos.

Ejemplo 1. Los jugadores A y B tienen cada uno una innumerable cantidad de posibles estrategias x e y, además

$$0 \leqslant x \leqslant 1; \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

La función de la ganancia tiene la expresión:

$$a(x, y) = (x - y)^2.$$

Hay que encontrar la solución del juego.

Resolución. La superficie $a(x, y)$ es un cilindro parabólico (fig. 7.5) y no tiene punto de silla. Determinemos el valor inferior del juego; es evidente que para todas las x *mín* $a(x, y) = 0$; *de* donde

$$\alpha = \max_x \min_y a(x, y) = 0.$$

Determinemos el valor superior del juego. Para ello, con una y fija

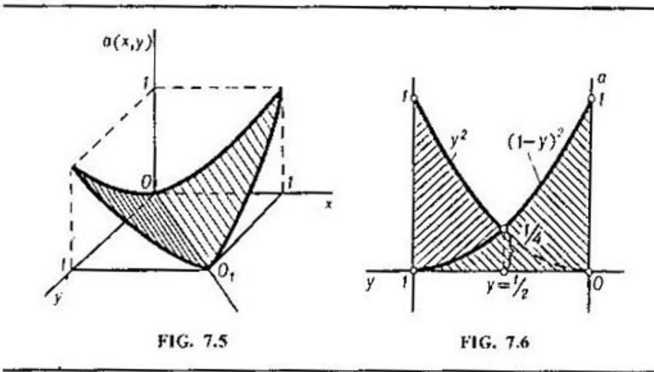


FIG. 7.5

FIG. 7.6

debemos encontrar

$$\max_x (x - y)^2.$$

En el caso dado, el máximo siempre se alcanza en el límite del intervalo (con $x = 0$ ó $x = 1$) o sea que es igual a la mayor de las magnitudes y^2 ó $(1 - y^2)$. Construiremos los gráficos de estas funciones (fig. 7.6), es decir, la proyección de la superficie $a(x, y)$ en el plano yOa. En la fig. 7.6 se muestra la función $\max_x (x - y)^2$ con línea gruesa.

Es evidente que su valor mínimo se logra con $y = \frac{1}{2}$ y es igual a $\frac{1}{4}$. En consecuencia, el valor superior del juego será $\beta = \frac{1}{4}$.

En este caso, el valor superior del juego coincide con el valor del juego v. Efectivamente, el jugador A puede emplear la estrategia mixta $S_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en la que los valores extremos $x = 0$ y $x = 1$

participan con iguales frecuencias; entonces la ganancia media del jugador A con cualquier estrategia y del jugador B será igual a:

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(1 - y)^2.$$

Es fácil ver que esta magnitud con cualquier valor de y entre 0 y 1

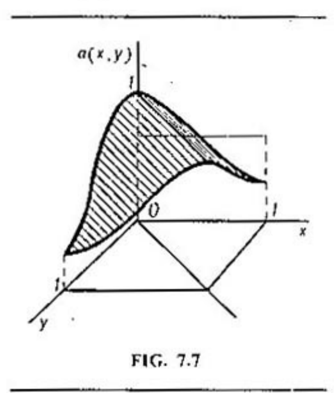


FIG. 7.7

tendrá un valor no menor que $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(1 - y)^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Así, con el empleo de esta estrategia mixta, el jugador A puede asegurarse una ganancia igual al valor superior del juego. Esta estrategia S_A es óptima ya que el valor del juego no puede ser mayor que el valor superior:

$$S_A = S_A^*.$$

Queda por encontrar la estrategia óptima del jugador B.

Es evidente que si el valor del juego v es igual al valor superior del juego β, la estrategia óptima del jugador B siempre será su estrategia pura mín-máx que asegura el valor superior del juego. En el caso dado tal estrategia es $y_0 = {}^1/_2$. En realidad con esta estrategia haga lo que haga el jugador A su ganancia no será mayor de $\frac{1}{4}$. Eso se deduce

de la evidente desigualdad:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = x(x-1)+\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 2. La parte *A* ("nosotros") dispara al avión *B* del enemigo. Para evadirse del ataque el enemigo puede maniobrar

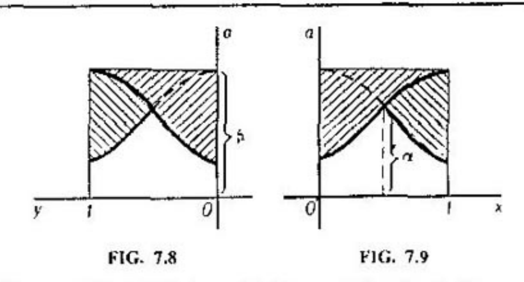


FIG. 7.8 FIG. 7.9

con cierta sobrecarga y, a la que él, según su voluntad, puede dar valores desde $y=0$ (movimiento rectilíneo) hasta $y=y_{máx}$ (vuelo en circunferencia de curvatura máxima). Consideraremos que $y_{máx}$ es la unidad de medida, o sea haremos $y_{máx}=1$.

En la lucha con el enemigo podemos emplear un aparato de precisión, basado en una u otra hipótesis del movimiento del objetivo durante el tiempo de vuelo del proyectil. La sobrecarga x en esta maniobra hipotética se puede suponer igual a cualquier valor entre 0 y 1.

Nuestra tarea es derribar al enemigo; la tarea del enemigo es permanecer incólume. La probabilidad de alcanzarle para los datos x e y se expresa aproximadamente con la fórmula

$$a(x, y) = pe^{-k(x-y)^2},$$

donde y es la sobrecarga empleada por el enemigo; x, la sobrecarga que se tiene en cuenta en el aparato de precisión.

Hay que determinar la estrategia óptima de las dos partes.

Resolución. Es evidente que la solución del juego no cambiará si suponemos $p=1$. La función de la ganancia $a(x, y)$ se representa por la superficie que aparece en la fig. 7.7. Esta es una

superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas a la bisectriz del ángulo xOy de los ejes coordenados y la intersección con un plano perpendicular a la generatriz es una curva del tipo de la curva normal de distribución.

Empleando la interpretación geométrica del valor inferior y superior del juego propuesta anteriormente, encontramos $\beta = 1$ (fig. 7.8) y $\alpha = e^{-\frac{k}{4}}$ (fig. 7.9).

El juego no tiene punto de silla; se tiene que buscar la solución en el terreno de las estrategias mixtas. El problema en cierto grado

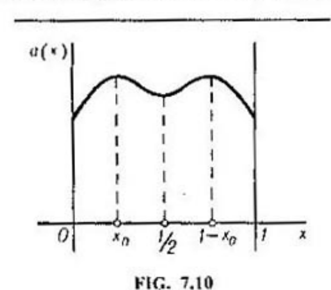


FIG. 7.10

es análogo al problema del ejemplo anterior. En efecto, cuando los valores de k son pequeños, la función $e^{-k(x-y)^2}$ se comporta aproximadamente como la función $-(x-y)^2$ y la solución del juego se obtendrá si se cambian los papeles de los jugadores A y B en la solución del ejemplo anterior. O sea, nuestra estrategia óptima será la estrategia pura $x = \frac{1}{2}$ y la estrategia óptima del adversario

$$S_B^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

consistirá en el empleo de las estrategias extremas $y = 0$ e $y = 1$ con las mismas frecuencias. Eso quiere decir que en todos los casos tenemos que emplear una mira calculada para una sobrecarga $x = \frac{1}{2}$ y el enemigo no debe hacer en la mitad de los casos ninguna

maniobra y en la otra mitad debe realizar la máxima maniobra posible.

Es fácil mostrar que esta solución será justa para los valores $k \leqslant 2$. Efectivamente, la ganancia media con la estrategia del adversario

$$S_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

y con nuestra estrategia, x se expresa mediante la función

$$a(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-kx^2} + e^{-k(1-x)^2}\right),$$

la cual para los valores $k \leqslant 2$ tiene un máximo cuando $x = \frac{1}{2}$, que es igual al valor inferior del juego α. En consecuencia, el empleo de la estrategia S_B le asegurará al enemigo una pérdida no mayor de α, de donde se ve que α, el valor inferior del juego, es también el valor del juego v.

Al ser $k > 2$ la función $a(x)$ tiene dos máximos (fig. 7.10) colocados simétricamente con relación a $x = \frac{1}{2}$ en los puntos x_0 y $1 - x_0$; además, el valor de x_0 depende de k.

Evidentemente, con $k = 2x_0 = 1 - x_0 = \frac{1}{2}$; al aumentar k los puntos x_0 y $1 - x_0$ se separan acercándose a los puntos extremos (0 y 1). Por lo tanto la solución del juego dependerá de k. Daremos un valor concreto a k, por ejemplo $k = 3$, y encontraremos la solución del juego; para ello calcularemos la abscisa x_0 máxima de la curva $a(x)$.

Igualando a cero la derivada de la función $a(x)$ escribimos la ecuación para el cálculo de x_0

$$xe^{-3x^2} = (1 - x)\,e^{-3(1-x)^2}.$$

Esta ecuación tiene tres raíces: $x = \frac{1}{2}$ (en donde se llega al mínimo) y x_0, $1 - x_0$ en donde se alcanzan los máximos. Resolviendo la

ecuación en forma numérica encontramos aproximadamente

$$x_0 \approx 0{,}07;$$
$$1 - x_0 \approx 0{,}93.$$

Demostremos que en el caso dado la solución del juego será el par de estrategias siguientes:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} x_0 & 1 - x_0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$S_B^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Con nuestra estrategia S_A^* y la estrategia del adversario y, la ganancia media será

$$a_1(y) = \frac{1}{2}\left(e^{-3(0{,}07 - y)^2} + e^{-3(0{,}93 - y)^2}\right).$$

Encontremos el mínimo de $a_1(y)$ con $0 < y < 1$. La función $a_1(y)$ es simétrica con relación a $y = \frac{1}{2}$ y puede tener sólo uno o dos máximos; su mínimo, en todo caso, se alcanza en el punto medio del segmento (0, 1), o bien en sus límites. Suponiendo $y = 0$ (o $y = 1$) calcularemos

$$a_1(0) = a_1(1) = \frac{1}{2}(e^{-3 \cdot 0{,}07^2} + e^{-3 \cdot 0{,}93^2}) = 0{,}530.$$

Suponiendo que $y = \frac{1}{2}$ tendremos

$$a_1\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-3 \cdot 0{,}43^2} = 0{,}574,$$

que es mayor que $a_1(0)$; por lo tanto el valor del juego es no menor que $a_1(0)$:

$$v \geqslant \frac{1}{2}\left(e^{-3x_0^2} + e^{-3(1-x_0)^2}\right) = 0{,}530.$$

Ahora supongamos que el adversario emplea la estrategia S_B^* y nosotros la estrategia x. Entonces la ganancia media será

$$a_2(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-3x^2} + e^{-3(1-x)^2}\right). \qquad (7.2)$$

Pero elegimos x_0 precisamente tal que con $x = x_0$ se consiga el máximo de la expresión (7.2); en consecuencia,

$$a_2(x) \leqslant \frac{1}{2}(e^{-3x_0^2} + e^{-3(1-x_0)^2}) = 0{,}530,$$

o sea que el enemigo, al emplear la estrategia S_B^* puede impedir una pérdida mayor que 0,530; por lo tanto $v = 0{,}530$ es el valor del juego y las estrategias S_A^* y S_B^* dan la solución. Esto quiere decir que debemos emplear con igual frecuencia punterías con $x = 0{,}07$ y $x = 0{,}93$ y el enemigo debe con igual frecuencia no maniobrar y maniobrar con la sobrecarga máxima.

Observaremos que la ganancia $v = 0{,}530$ es visiblemente mayor que el valor inferior del juego

$$\alpha = e^{-\frac{k}{4}} = e^{-0{,}75} = 0{,}472,$$

lo que podemos asegurarnos empleando nuestra estrategia máx-mín $x_0 = \frac{1}{2}$.

Uno de los procedimientos prácticos para resolver juegos infinitos es su aproximación a los finitos. Entonces convencionalmente se reúnen en una estrategia un grupo completo de posibles estrategias de cada jugador. De esta forma, por supuesto, sólo puede obtenerse una solución aproximada del juego, pero en la mayoría de los casos no es necesaria una solución exacta.

No obstante, hay que tener en cuenta que al emplear este procedimiento pueden aparecer soluciones en el terreno de las estrategias mixtas, incluso en aquellos casos en que es posible una solución del juego infinito inicial en estrategias puras, o sea cuando el juego infinito tiene punto de silla. Si después de la reducción de un juego

infinito a uno finito se obtiene una estrategia mixta en la que participan sólo dos estrategias "útiles" vecinas, tendrá sentido hacer la prueba de emplear una estrategia pura intermedia entre ellas del juego infinito inicial.

Para concluir, señalaremos que los juegos infinitos, a diferencia de los finitos, pueden también no tener solución. Veamos un ejemplo de un juego infinito sin solución. Dos jugadores dicen cada uno cualquier número entero. El que ha nombrado el número mayor recibe del otro 1 rublo. Si los dos han dicho el mismo número, el juego termina empatado. Es evidente que este juego no puede tener solución. Sin embargo, existen clases de juegos infinitos para los cuales, a ciencia cierta, se sabe de antemano que existen soluciones. En particular, se puede demostrar que si en un juego infinito las posibles estrategias x e y de los jugadores A y B cubren en forma continua cierto segmento y la función de la ganancia $a(x, y)$ es continua, siempre existe la solución del juego (en estrategias puras o mixtas).

A NUESTROS LECTORES:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

MIR PUBLICA

Markushevich A.

Números complejos y representaciones conformes

Esta obra se debe al vicepresidente de la Academia de Ciencias pedagógicas de la URSS, Doctor en Ciencias físicomatemáticas, catedrático Alexéi Markushevich.

En este pequeño trabajo al autor desarrolla la teoría de los números complejos y funciones más sencillas de los primeros (incluyendo la función de N. E. Zhukovski, aplicándola al diseño del perfil de un ala de avión). La exposición se da en forma geométrica. Los números complejos se consideran como segmentos dirigidos y las funciones como representaciones. Para llegar a tal comprensión de los números complejos hay que empezar por la interpretación geométrica de los números reales y de las operaciones con los mismos.

Este pequeño trabajo está destinado para los escolares y los estudiantes menores, así como para un amplio círculo de lectores de diferentes especialidades.

Lecciones populares de matemáticas

Este año se publicarán las siguientes obras
de nuestro sello editorial
"Lecciones populares de matemáticas:

1. Bársov A.
¿Qué es la programación lineal?

2. Beskin N.
Representación de figuras espaciales

3. Boltianski V.
La envolvente

4. Markuschévich A.
Curvas maravillosas
Números complejos y representaciones conformes
Funciones maravillosas

5. Natansón I.
Problemas elementales de máximo y mínimo
Suma de cantidades infinitamente pequeñas

6. Trajtenbrot B.
Los algoritmos y la solución automática
de problemas

Editorial MIR  **Moscú**